9 octobre 2012
FLA #02

応用数学B (*Fourier and Laplace Analysis*) 第2週

w.yamamoto

1 先週の内容

- 軌跡の様々な表現方法
- 線形常微分方程式

2 今週の内容

- 周期関数
- フーリエ級数

2.1 周期関数

フーリエ級数は、周期性を持つ関数の表現方法のひとつ。関数をいろいろな周波数の振動の重ね合わせで表現する。

周期性とは、関数が周期的である性質のこと。ある実数関数が周期的とは、実数 $T \neq 0$ が存在して、すべての $x \in \mathcal{R}$ について

$$\exists T \ \forall x \ f(x+T) = f(x) \tag{1}$$

が成り立つこと。周期は一つとは限らず、その中で正で一番小さい周期を基本周期と呼ぶ。

- 定数関数 $f(x) = c$ は任意の数 T が周期となる。
- $\sin x$ の周期は $2k\pi$ (k は任意の整数)、基本周期は 2π
- $\sin x/\sqrt{7}$ の周期は $2\sqrt{7}k\pi$, 基本周期は $2\sqrt{7}\pi$
- $2\cos x/5 + 3\sin x/7$ の周期は $70k\pi$、基本周期は 70π

周期を持たない関数のことは省略。

2.2 周期関数についてのお約束

周期関数は、数直線方向の伸縮変換で自在に周期を変更できる。$f(x)$ の周期が T のとき、x を $xT/\tilde{T}$ で置き換えた

$$g(x) = f\left(\frac{T}{\tilde{T}}x\right) \tag{2}$$

関数 $g(x)$ は、周期が $\tilde{T}$ となる。$g\left(x+\tilde{T}\right) = g(x)$ の確認は容易。(代入してみればいい) だから、周期関数を扱う議論は一般性を失うことなく、周期 2π の周期関数だけを相手にしておけば十分である。

また周期関数は、1 周期分の定積分は区間の選び方に依らず一定となる。すなわち、$f(x)$ の定義域 $[a,b]$ において、$\int_a^b f(x)\,dx$ が有限のとき、$\alpha, \alpha+T \in [a,b], \beta, \beta+T \in [a,b]$ を満たす任意の実数 α, β に対して

$$\begin{aligned} \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx &= \int_\beta^{\beta+T} f(x)\,dx + \int_{\beta+T}^{\alpha+T} f(x)\,dx - \int_\beta^\alpha f(x)\,dx \\ &= \int_\beta^{\beta+T} f(x)\,dx + \int_\beta^\alpha f(x)\,dx - \int_\beta^\alpha f(x)\,dx \\ &= \int_\beta^{\beta+T} f(x)\,dx \end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つ。だから、周期関数の 1 周期分の定積分を考えるときは、$\alpha = 0$ として積分区間を $[0,T]$ とするか、$\alpha = -T/2$ として積分区間を $[-T/2, T/2]$ としておけば十分である。被積分関数が偶関数のときに

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = 2\int_0^{T/2} f(x)\,dx \tag{4}$$

また奇関数のときには

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = 0 \tag{5}$$

となり、計算が多少楽になるので、$\alpha = -T/2$ は都合が良い。

2.3 フーリエ級数

周期 T の周期関数 $f(x)$ を

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x\right) \tag{6}$$

のように基本周期が $T, T/2, T/3, \ldots, T/n, \ldots$ の余弦関数 (cos) と正弦関数 (sin) の無限級数展開を、フーリエ級数という。$a_0, a_1, a_2, \ldots$ および $b_1, b_2, \ldots$ は無限級数展開の係数であり、フーリエ係数という。これらは

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x dx, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x dx, \end{aligned}$$

で与えられる。

周期を 2π に変換すれば、フーリエ級数は

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{7}$$

と多少、簡単になる。このときのフーリエ係数は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \end{aligned}$$

である。

フーリエ級数は、周期関数 $f(x)$ を偶関数成分 $\cos nx$ と奇関数成分 $\sin nx$ という二種類の基本振動の和に分解する。しかしどんな周期関数でもフーリエ級数展開ができるとは限らない。この展開が収束するためには、周期関数 $f(x)$ が区分的なめらか、という性質を持たなければならない。

- $f(x)$ が区分的に連続とは、$f(x)$ の不連続点が高々有限個であること
- $f(x)$ が区分的になめらかとは、$f(x)$ と $f'(x)$ がともに区分的に連続であること

$f(x)$ が区分的に連続で、連続な各部分区間で有界であれば、その区間全体で積分可能である。

2.4　フーリエ級数の計算例

3　レポート課題 2

今年度も、レポート課題という名のノート提出を求めてみます。また授業内の小テストも実施するかもしれません。

F-2-1　次の微分方程式を解け。

(1) $dy/dt = -ky, y(0) = y_0$

(2) $dy/dx = k/x, y(x_0) = 0$

(3) $dy/dx + 2y(t) = 0, y(0) = 2$

(3) $d^2y/dx^2 - 5dy/dx + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

- 提出するもの：A4 ないし B5 のレポート用紙，ルーズリーフなど。片面でも両面でも可。
- 様式：(1) 順に書くこと。(2)1 ページ目の一番上に「学籍番号」「氏名」を記すこと。(3) 複数枚に渡るときには，ホッチキスなどで留めること。(両面の場合は折り曲げる可能性があること，予めお断りしておきます)
- 提出場所：今週以降は、火曜日中に先端工学基礎課程事務室に提出した分を、期限内として受け付けます。(期限に遅れて受理したものは、ハンド リングに自信がないので、返却は保証できません)
- 提出期限：2012.10.16(来週の火曜日) の 7 時まで。(〆切後、即座に学内便で送ってもらいます。)
- レポート作成上の注意：同様の問題が試験に出た時に，自分のノートには書いてあるのに，と後悔しなくて済むように，見ずには解けるように，解答を丁寧に計算過程まで記して下さい。また解答の中で「教科書の (**) 式より」などと，してはいけません。持ち込み不可の試験でも，式番号を覚えていられるのなら，話は別ですが。