30 octobre 2012
FLA #04

応用数学B (*Fourier and Laplace Analysis*) 第4週

w.yamamoto

1　先週の内容

- フーリエ係数の計算、偶関数のフーリエ級数と奇関数のフーリエ級数、フーリエ係数の例 (宿題)
- 複素数と複素平面、オイラーの公式、複素数の極座標表現

2　今週の内容

- 複素フーリエ級数 (フーリエ変換の準備として)
- フーリエ変換、逆フーリエ変換

2.1　複素フーリエ級数

任意の複素数の指数関数表現は、オイラーの公式を用いて

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\frac{a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right) \tag{1}$$

と得られる。ここで $r=\sqrt{a^2+b^2}$、$\theta=\cos^{-1}\left(a/\sqrt{a^2+b^2}\right)$ と置いた。

周期 2π の複素関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開は

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+i\sum_{i=1}^{\infty}b_n\sin nx \tag{2}$$

で与えられる。オイラーの公式を用いると、

$$f(x)\sim c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx} \tag{3}$$

として表せる。ここで複素フーリエ級数展開の係数 c_n は

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-inx}dx \tag{4}$$

で求まる。この積分は更に

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx-i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \tag{5}$$

となる。

2.2　フーリエ変換の使い道

周期関数についての問題であれば、フーリエ級数が応用できる可能性がある。

1. 周期関数についての微分方程式：電気回路、弦の振動、熱伝導
2. 周期関数のスペクトル分解：音声の周波数成分、分光、フィルタ技術

前者はフーリエ級数で表現できることを利用して方程式を解くが、後者はフーリエ級数表現されたものの個々の成分を取り出したり、フーリエ係数を操作したりする。

2.3 フーリエ変換の準備

フーリエ級数

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-i\frac{2n\pi}{T}x} dx \right\} e^{i\frac{2n\pi}{T}x} \tag{6}$$

は有限区間 $[-T/2, T]$ の上の周期関数の周波数分解であった。この定義域 $[-T/2, T/2]$ を $T \to \infty$ と引き延ばすことで、複素フーリエ級数は周期関数から非周期関数に対応できるようになる。このとき

$$\omega_n = 2n\pi/T \tag{7}$$

と

$$\delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T} \tag{8}$$

を定義すると、フーリエ級数は

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-i\omega_n x} dx \right\} e^{i\omega_n x} \tag{9}$$

となる。この式は更に

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-i\omega_n (x-y)} dy \right\} \delta\omega \tag{10}$$

と変形できる。ここで $T \to \infty$ と極限をとると、この右辺は

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{i\omega(x-y)} dy \right\} d\omega \tag{11}$$

と重積分となる。これをフーリエの積分定理という。

3 レポート課題 4

教科書の第 6 章の第 1 節に、非同時 2 階常微分方程式のフーリエ級数による解法が現れる。これを理解してまとめ、自分で２，３問の例題を作って、解いてみなさい。

- 提出するもの：A4 ないし B5 のレポート用紙，ルーズリーフなど。片面でも両面でも可。
- 様式：(1) 順に書くこと。(2)1 ページ目の一番上に「学籍番号」「氏名」を記すこと。(3) 複数枚に渡るときには，ホッチキスなどで留めること。(両面の場合は折り曲げる可能性があること，予めお断りしておきます)
- 提出場所：今週以降は、火曜日中に先端工学基礎課程事務室に提出した分を、期限内として受け付けます。(期限に遅れて受理したものは、ハンド リングに自信がないので、返却は保証できません)
- 提出期限：2012.11.06(来週の火曜日) の 7 時まで。(〆切後、即座に学内便で送ってもらいます。)
- レポート作成上の注意：同様の問題が試験に出た時に，自分のノートには書いてあるのに，と後悔しなくて済むように，見ずには解けるように，解答を丁寧に計算過程まで記して下さい。また解答の中で「教科書の (**) 式より」などと，してはいけません。持ち込み不可の試験でも，式番号を覚えていられるのなら，話は別ですが。

http://bit.ly/uecfla-2012