2013.11.16

応用数学B　授業内ミニテスト #3

学籍番号 | | | | | | | |

氏　　名 ________________________________

30 分で下記の問いに答えよ。各問とも、答えのみでなく、途中の計算もすべて記すこと。

1. フーリエ変換：次の関数のフーリエ変換を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 + x - 6$

(2) $f(x) = \delta(x)$

(3) $f(x) = \sin x + \cos x$

(4) $f(x) = \sin(x - \pi/4)$

(5) $f(x) = e^{-2x} u(x)$

(6) $f(x) = \sin 3x$

(7) $f(x) = x^2 e^{-3x} u(x)$

(8) $f(x) = \sin(-3x + \pi/5)$

(9) $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$

(10) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

A. フーリエ変換表

$\mathscr{F}1$	$f'(x)$	$i\omega F(\omega)$
$\mathscr{F}2$	$f''(x)$	$(i\omega)^2 F(\omega)$
$\mathscr{F}3$	$f^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n F(\omega)$
$\mathscr{F}4$	$f(x-c)$	$e^{-i\omega c}F(\omega)$
$\mathscr{F}5$	$f(\alpha x)$	$\dfrac{1}{\lvert\alpha\rvert}F\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)$
$\mathscr{F}6$	$\overline{f(x)}$	$\overline{F(-\omega)}$
$\mathscr{F}7$	$\overline{f(-x)}$	$\overline{F(\omega)}$
$\mathscr{F}8$	$xf(x)$	$i\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$
$\mathscr{F}9$	$x^n f(x)$	$i^n\dfrac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$
$\mathscr{F}10$	$f * g(x)$	$F(\omega)\cdot G(\omega)$
$\mathscr{F}11$	$f(x)\,g(x)$	$\dfrac{1}{2\pi}F * G(\omega)$
$\mathscr{F}12$	$\delta(x)$	1
$\mathscr{F}13$	$\delta(x-c)$	$e^{-i\omega c}$
$\mathscr{F}14$	$\delta'(x)$	$i\omega$
$\mathscr{F}15$	1	$2\pi\delta(\omega)$
$\mathscr{F}16$	$u(x)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{i\omega}$
$\mathscr{F}17$	$u(x-c)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{i\omega}e^{-i\omega c}$
$\mathscr{F}18$	x	$2\pi i\delta'(\omega)$
$\mathscr{F}19$	x^n	$2\pi i^n\delta^{(n)}(\omega)$
$\mathscr{F}20$	$\dfrac{1}{x}$	$\pi i-2\pi i u(\omega)$
$\mathscr{F}21$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\big(\pi i-2\pi i u(\omega)\big)$
$\mathscr{F}22$	$e^{-ax}\,u(x)$	$\dfrac{1}{i\omega+a}$
$\mathscr{F}23$	$-\,e^{ax}\,u(-x)$	$\dfrac{1}{i\omega-a}$
$\mathscr{F}24$	$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\dfrac{2a}{\omega^2+a^2}$
$\mathscr{F}25$	$x\,e^{-ax}\,u(x)$	$\dfrac{1}{(i\omega+a)^2}$
$\mathscr{F}26$	$x^n\,e^{-ax}\,u(x)$	$\dfrac{n!}{(i\omega+a)^{n+1}}$
$\mathscr{F}27$	$\sin cx$	$i\pi\big(\delta(\omega+c)-\delta(\omega-c)\big)$
$\mathscr{F}28$	$\cos cx$	$\pi\big(\delta(\omega+c)+\delta(\omega-c)\big)$
$\mathscr{F}29$	$e^{-ax}\sin cx\,u(x)$	$\dfrac{c}{(i\omega+a)^2+c^2}$
$\mathscr{F}30$	$e^{-ax}\cos cx\,u(x)$	$\dfrac{i\omega+a}{(i\omega+a)^2+c^2}$

フーリエ変換表・ラプラス変換表における定数は，次のとおりである．

- a は正の定数（$a>0$）．
- α は 0 でない実定数（$\alpha\neq 0$）［ $\mathscr{F}5$ のみ ］．
- c, γ は任意の実定数．
- n は自然数（$n=1, 2, \cdots$）．

16 novembre 2013
FA #07

応用数学B（*Fourier and Laplace Analysis*）補足資料

w.yamamoto

1　微分方程式

微分方程式は数理モデリングの手法のひとつである。例えば

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t) \tag{1}$$

は単振動の運動方程式で、これはあらゆる時点の質点の位置 $x(t)$ は、その 2 階微分 $x^{(2)}(t)$ によって定まることを記述している。物理学で多く現れる微分方程式は、対象の局所的な時間変化を表現する方程式で、過去から未来までを支配するモデリング手法である。

初等解析で現れる微分方程式には、変数分離形、線形、同次形、非同次形、完全形などの形による分類、現れる導関数の階数による 1 階、2 階、などの分類、変数の数に応じた常微分方程式、偏微分方程式の分類、またベルヌーイ、リカッチ、クレロー、ラグランジュなどの人の名前がついた分類、がある。この講義では常微分方程式が非同次の場合を扱う。

2　線形常微分方程式

教科書 p.108 に、常微分方程式の例がある。

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) + \frac{d}{dx}f(x) - 6f(x) = \sin x \tag{2}$$

これは $f(x)$ についての微分方程式だが、f 以外の関数も含まれているため非同次形と呼ばれる。右辺が 0

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) + \frac{d}{dx}f(x) - 6f(x) = 0 \tag{3}$$

ならば、同次形である。非同次形と同次形では微分方程式の解法が異なる。

同次線形常微分方程式は一般に

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x) + \cdots + a_{n-2}\frac{d^2}{dx^2}f(x) + a_{n-1}\frac{d}{dx}f(x) + a_n 6f(x) = 0 \tag{4}$$

と表せる。この方程式の解は、$\frac{d}{dx}$ を D と置いて、$f(x)$ を消去して得られる n 次方程式

$$D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-2}D^2 + a_{n-1}D + a_n = 0 \tag{5}$$

から得られる。この方程式を、特性方程式と呼ぶ。特性方程式が相異なる n 個の実根を持つとき、それらを $d_1, d_2, \ldots, d_n$ とおけば、同次線形常微分方程式の解は

$$f(x) = C_1e^{d_1} + C_2e^{d_2} + \cdots + C_ne^{d_n} \tag{6}$$

と求まる。ここで $C_1, \ldots, C_n$ は初期条件によって定まる定数で、初期条件が与えられていなければ、このまま記して解とする。また上の方程式が重根もしくは虚根を持つときは、解の形が異なる。

実際に特性方程式を解いてみると、

$$D^2 + D - 6 = 0 \tag{7}$$

より $D = -3, 2$ となる。これより、

$$f(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} \tag{8}$$

と求まる。非同次常微分方程式であれば、フーリエ級数、フーリエ変換、ラプラス変換の出番となる。