

フーリエ変換学力試験 (期末)

所属

学籍番号

氏名

1 $[-\pi, \pi)$ で

$$f(x) = ax^2 + bx \quad (1)$$

となる関数のフーリエ級数を次の手順で求めよ。ただし $a \neq 0, b \neq 0$ とする。解答だけでなく、計算手順も示すこと。(15 点)

- (i) $f_1(x) = x^2$ のフーリエ級数を求めよ。
- (ii) $f_1(x) = x$ のフーリエ級数を求めよ。
- (iii) $f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$ としてフーリエ級数を求めよ。

2 非同次 2 階常微分方程式

$$2f''(x) - 7f'(x) + 6f(x) = \cos 2x \quad (2)$$

を以下の問いに従って、フーリエ級数を用いて解け。解答だけでなく、計算手順も示すこと。(15 点)

- (i) 微分方程式 (2) の特殊解を、フーリエ級数を用いて求めよ。
- (ii) 微分方程式 (2) の右辺を 0 で置き換えて得られる、同次 2 階常微分方程式の一般解を求めよ。ただし解に含まれる定数は c_1, c_2, \dots , などと小文字の c を用いてよい。
- (iii) 微分方程式 (2) の一般解を求めよ。

3 次の二つの非同次 2 階常微分方程式の特殊解を、フーリエ変換を用いて求めよ。解答だけでなく、計算手順も示すこと。フーリエ変換表は別途添付の通り。(20 点)

- (i) $f''(x) - 5f'(x) - 6f(x) = 2\delta(t)$
- (ii) $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 3e^{i\omega_0 x}$

A. フーリエ変換表

$\mathcal{F}1$	$f'(x)$	$i\omega F(\omega)$
$\mathcal{F}2$	$f''(x)$	$(i\omega)^2 F(\omega)$
$\mathcal{F}3$	$f^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n F(\omega)$
$\mathcal{F}4$	$f(x-c)$	$e^{-i\omega c} F(\omega)$
$\mathcal{F}5$	$f(\alpha x)$	$\frac{1}{ \alpha } F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
$\mathcal{F}6$	$\overline{f(x)}$	$\overline{F(-\omega)}$
$\mathcal{F}7$	$f(-x)$	$\overline{F(\omega)}$
$\mathcal{F}8$	$xf(x)$	$i \frac{d}{d\omega} F(\omega)$
$\mathcal{F}9$	$x^n f(x)$	$i^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
$\mathcal{F}10$	$f * g(x)$	$F(\omega) \cdot G(\omega)$
$\mathcal{F}11$	$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi} F * G(\omega)$
$\mathcal{F}12$	$\delta(x)$	1
$\mathcal{F}13$	$\delta(x-c)$	$e^{-i\omega c}$
$\mathcal{F}14$	$\delta'(x)$	$i\omega$
$\mathcal{F}15$	1	$2\pi\delta(\omega)$
$\mathcal{F}16$	$u(x)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$
$\mathcal{F}17$	$u(x-c)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega c}$
$\mathcal{F}18$	x	$2\pi i \delta'(\omega)$
$\mathcal{F}19$	x^n	$2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega)$
$\mathcal{F}20$	$\frac{1}{x}$	$\pi i - 2\pi i u(\omega)$
$\mathcal{F}21$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} (\pi i - 2\pi i u(\omega))$
$\mathcal{F}22$	$e^{-ax} u(x)$	$\frac{1}{i\omega + a}$
$\mathcal{F}23$	$-e^{ax} u(-x)$	$\frac{1}{i\omega - a}$
$\mathcal{F}24$	$e^{-a x }$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\mathcal{F}25$	$x e^{-ax} u(x)$	$\frac{1}{(i\omega + a)^2}$
$\mathcal{F}26$	$x^n e^{-ax} u(x)$	$\frac{n!}{(i\omega + a)^{n+1}}$
$\mathcal{F}27$	$\sin cx$	$i\pi(\delta(\omega + c) - \delta(\omega - c))$
$\mathcal{F}28$	$\cos cx$	$\pi(\delta(\omega + c) + \delta(\omega - c))$
$\mathcal{F}29$	$e^{-ax} \sin cx u(x)$	$\frac{c}{(i\omega + a)^2 + c^2}$
$\mathcal{F}30$	$e^{-ax} \cos cx u(x)$	$\frac{i\omega + a}{(i\omega + a)^2 + c^2}$

フーリエ変換表・ラプラス変換表における定数は、次のとおりである。

- a は正の定数 ($a > 0$).
- α は 0 でない実定数 ($\alpha \neq 0$) [$\mathcal{F}5$ のみ].
- c, γ は任意の実定数.
- n は自然数 ($n = 1, 2, \dots$).