

確率論 (Probability Theory) 第3週分の課題の解答例

w.hamamoto

1 点数記録のお願い

採点は各小問ごとに × でお願ひします。どこを間違えたか、のペン入れはしなくても構いません。そして各問それぞれの出来を大問ごとに 0、1、2 など、 の数で残して貰えますか？部分点をあげてもいいけど、 は 0.5 点にしてください。

小問を全て正解か 1 問ミスぐらいが A、8 割程度で B、それ以下は C、とだけ記してください。

これらの記録を、エクセルファイルで残すようにお願いします。あと毎回、平均点とヒストグラムも作ってください。

4 限に提出されたレポートを返却して、回答状況をフィードバックしたいので、ここまでを木曜日の昼休みまでをお願いします。

2 解答例

#3-1 勝率が天気によって左右される賭け事がある。また、勝率が上がる幸運のお守りを入手すると、勝率が上昇することも知られている。ただし、天気は自分では制御できず、お守りの入手にもまた運が左右する。天気とお守りの入手の成否は互いに独立とし、天気の確率とお守りの入手確率と、天気とお守りが与えられたときの勝率を、下記の通りとする。

入手	できる	できない
確率	0.3	0.7

天候	晴	曇	雨
確率	0.4	0.3	0.3

各条件の下での勝率表

	晴	曇	雨
有	0.6	0.6	0.5
無	0.6	0.5	0.4

(条件付き確率表、負ける確率は省略)

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 晴れの日、曇りの日、雨の日、それぞれの平均勝率 (勝つ周辺確率) を求めよ。

(2) お守りが入手できる日、できない日、それぞれの平均勝率 (勝つ周辺確率) を求めよ。

(解答方針) 天気を $X_1 \in \{1, 2, 3\}$ 、お守り入手を $X_2 \in \{1, 2\}$ 、賭け事の勝敗を $Y \in \{0, 1\}$ で表すと、(1) は $\Pr[Y = 1 | X_1 = x_1]$ を求めよ、(2) は $\Pr[Y = 1 | X_2 = x_2]$ を求めよ、という問題です。いずれも、

$$\Pr[Y = 1 | X_1 = x_1] = \Pr[Y = 1 | X_1 = x_1, X_2 = 1] \Pr[X_2 = 1] + \Pr[Y = 1 | X_1 = x_1, X_2 = 2] \Pr[X_2 = 2] \quad (1)$$

$$\Pr[Y = 1 | X_2 = x_2] = \Pr[Y = 1 | X_1 = 1, X_2 = x_2] \Pr[X_1 = 1] + \Pr[Y = 1 | X_1 = 2, X_2 = x_2] \Pr[X_1 = 2] + \Pr[Y = 1 | X_1 = 3, X_2 = x_2] \Pr[X_1 = 3] \quad (2)$$

で計算できます。(ので計算してみてください)

#3-2 参考書の問題 1.6 を参考に、条件付き確率の計算に関してベイズの定理を用いる、次の問いに答えよ。青色の袋が 3 つ、赤色の袋が 2 つ、黄色の袋が 1 つある。これらの袋の中には、赤玉と白玉がそれぞれ表に書かれた個数だけ、入っている。例えば、赤玉が 2 個、白玉が 3 個入った、青色の袋が 3 つある、ということである。

	青袋	赤袋	黄袋
赤玉	2個	1個	4個
白玉	3個	4個	1個

- (1) このとき、目隠しをされた状態で、まず合計6つの袋から無作為に1つの袋を選ぶ。まずこの状態で、これ以上の情報は得られていないとして、選んだ袋が青色である確率、赤色である確率、黄色である確率、をそれぞれ求めよ。
- (2) 次に、目隠しをされたまま、選ばれた袋に手を入れ、中を見ずに1個の玉を取り出したら、白玉だったと教えられた。これ以上の情報は得られていない状態で、選んだ袋が青色である確率、赤色である確率、黄色である確率、をそれぞれ求めよ。

(解答方針) この問題は、久保木先生の本に解き方が載っている。1章の章末問題1.6の、玉の数を変えただけなので、p.182を参考に、計算してみてください。

#3-3 独立性について、以下の問題に答えよ。

- (1) 1組52枚のトランプカードセットを、裏を上にした状態でよく切り、裏にしたまま、1枚のカードを引く試行を考える。マークがスペードである事象を S 、数字が $\{10, J, Q, K, A\}$ である事象を H として、この二つの事象は互いに独立かどうか、同時確率や条件付き確率を求めて調べよ。
- (2) いかさまや仕込みのない6面の賽子を1回振る試行を考える。出た目が2の倍数である事象を E 、出た目が3の倍数である事象を T として、この二つの事象は互いに独立かどうか、同時確率や条件付き確率を求めて、調べよ。
- (3) (2)につき、いかさまや仕込みのない7面の賽子ではどうか、同様に調べよ。

(解答方針) この問題は、教えてない内容なので、できない可能性が高いけど、まあ気にせず採点してください。

(1) は、 S と H が同時に生起する確率は $5/52$ 、 S だけが生起する確率は $13/52 = 1/4$ 、 H だけが生起する確率は $20/52 = 5/13$ 、だから、 $5/52 = 1/4 \times 5/13$ なので、 S と H は独立。(2) は、 E と T が同時に生起するのは6が出た場合のみなので、確率は $1/6$ 。 E のみが生起する確率は $1/3$ 、 T のみが生起する確率は $1/2$ 、だから独立。(3) は、どうなりましょう？

#3-4 自分の身の回りにある、確率論がなかったら、開発されてなかったり、今提供されている機能や性能を実現できていないであろうと思われる、物や製品を探し、根拠と共に紹介せよ。

(採点方針) どんな回答があったか、を教えてください。何か書いてあれば。

#3-5 天気予報を詳細に行うことを考える。互いに排反な気象状況をできるだけ多く、列挙せよ。

(採点方針) 個数を数えるだけでいいですので、数字を記録してください。ここは書いてあれば。