確率論 (*Probability Theory*) 同時分布

w.yamamoto

1　1 次元の確率変数のための確率分布

確率変数が 1 つの場合は簡単。試行 1 回の結果の確率モデル。以下は、標本空間 $\mathcal{X}$ の全要素の間に順序が定められている場合の定義。

累積確率 $F(x) = Pr[X \leq x]$ (単調非減少かつ右連続)

連続分布 $Pr[X \leq x] = Pr[X <] = 1 - Pr[X \geq x] = 1 - Pr[X > x]$

確率関数 $p(x) = Pr[X = x] = \lim_{\delta \to +0} F(x + \delta) - \lim_{\delta \to -0} F(x + \delta)$ (右側極限と左側極限の差、$F(x)$ の不連続点でのジャンプの高さ)

確率密度関数 $f(x) = dF(x)/dx$ ($F(x)$ の傾き)

期待値 (離散) $E[h(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} h(x)\, p(x)$

期待値 (連続) $E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx$

原点モーメント $m_k = E\left[X^k\right]$, 特に $\mu = m_1$ は分布の重心

中心モーメント $\mu_k = E\left[(X - m_1)^k\right]$, 特に $\sigma^2 = \mu_2$ は分布のばらつき

モーメントによる分布の形状の特徴量 $\beta_1 = \mu_3/\sigma^3$ は歪度で、確率分布が原点対称であれば 0。$\beta_2 = \mu_4/\sigma^4$ は尖度で、正規分布であれば 3。

マルコフの不等式 $Pr[X > a] < \mu_1/a$。ただし X は負の値は取らない確率変数。

チェビシェフの不等式 $Pr[|X - \mu_1| > a] < \sigma^2/a^2$。ただし X は負の値は取らない確率変数。

モーメント 母関数 $M(t) = E[\exp(tX)]$

確率分布の指定 確率関数または確率密度関数、累積分布関数、すべてのモーメント、のいずれかひとつで良い。

2　2 次元以上の確率変数のための確率分布

表 1 は以前にも出てきた変数が 2 つの場合の確率表。

表 1 同時確率と周辺確率の表

	Y				周辺
X		1	2	3	X
	1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$p_{1\cdot}$
	2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$p_{2\cdot}$
	3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$p_{3\cdot}$
周辺	Y	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$p_{\cdot 3}$	1

表 1 を確率関数で表すと、確率表の関数版。同時確率 (関数)。

$$p\left(x,y\right)=Pr\left[X=x,\ Y=y\right] \tag{1}$$

同時累積確率 (分布関数)。

$$F\left(x,y\right)=Pr\left[X\le x,Y\le y\right]=\sum_{u\le x}\sum_{v\le v}p\left(x,y\right) \tag{2}$$

連続確率変数の場合、同時密度関数は同時密度度関数の 2 階偏微分。

$$f\left(x,y\right)=\frac{d^2}{dxdy}F\left(x,y\right) \tag{3}$$

離散分布と連続分布について、周辺確率関数と周辺確率密度関数も同様に定義できる。

$$p\left(x\right)=\sum_{y=-\infty}^{\infty}p\left(x,y\right) \tag{4}$$

$$p\left(y\right)=\sum_{x=-\infty}^{\infty}p\left(x,y\right) \tag{5}$$

$$f\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dy \tag{6}$$

$$f\left(y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dx \tag{7}$$

周辺分布と条件付き分布はとても近い関係。周辺分布は表 2 は、天気を例にした場合に出てきた条件付確率表。

表 2 Y の値が得られているときの X の条件付き確率と周辺確率の表

Y \ X	1	2	3	周辺 X
1	$p_{1\|1}=p_{11}/p_{1\cdot}$	$p_{1\|2}=p_{12}/p_{1\cdot}$	$p_{1\|3}=p_{13}/p_{1\cdot}$	$p_{1\cdot}$
1	$p_{2\|1}=p_{21}/p_{2\cdot}$	$p_{2\|2}=p_{22}/p_{2\cdot}$	$p_{2\|3}=p_{23}/p_{2\cdot}$	$p_{2\cdot}$
1	$p_{3\|1}=p_{31}/p_{3\cdot}$	$p_{3\|2}=p_{32}/p_{3\cdot}$	$p_{3\|3}=p_{33}/p_{3\cdot}$	$p_{3\cdot}$
				1

表 2 には、Y の値が分かっているときの、X の条件付き確率が表として表されている。条件付き確率は、(X,Y) の同時確率を Y の周辺確率で割る定義も、以前に紹介した通り。

条件付き分布は片方の値が分かっているときのもう一方の分布。| の右側が「条件」、左側が「不確定要素」。「左側の所与のときの右側の $\cdots$ 」などと読む。

$$p\left(x|y\right)=p\left(x,y\right)/p\left(y\right) \tag{8}$$

$$p\left(y|x\right)=p\left(x,y\right)/p\left(x\right) \tag{9}$$

$$f\left(x|y\right)=f\left(x,y\right)/f\left(y\right) \tag{10}$$

$$f\left(y|x\right)=f\left(x,y\right)/f\left(x\right) \tag{11}$$

条件付き分布も周辺分布も、全確率が 1、確率は非負、累積確率の単調非減少性は保たれていることに注意する。

期待値は、どの分布についての期待値を計算するかで、呼び名や定義が異なる。同時分布についての期待値は

$$E\left[h\left(X,Y\right)\right]=\begin{cases}\sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{y=-\infty}^{\infty}h\left(x,y\right)p\left(x,y\right) & \text{離散の場合}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h\left(x,y\right)f\left(x,y\right)dxdy & \text{連続の場合}\end{cases} \tag{12}$$

周辺分布についての期待値は、例えば X の周辺分布に関して

$$E\left[h\left(X,Y\right)\right]=\begin{cases}\sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{y=-\infty}^{\infty}h\left(x,Y\right)p\left(x\right) & \text{離散の場合}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h\left(x,Y\right)f\left(x\right)dx & \text{連続の場合}\end{cases}\tag{13}$$

となり、これを周辺期待値と呼ぶ。

条件付き分布についての期待値は、例えば $X|Y=y$ については

$$E\left[h\left(X,Y\right)\right]=\begin{cases}\sum_{x=-\infty}^{\infty}h\left(x,y\right)p\left(x|y\right) & \text{離散の場合}\\ \int_{-\infty}^{\infty}h\left(x,y\right)f\left(x|y\right)dx & \text{連続の場合}\end{cases}\tag{14}$$

となり、これを条件付き期待値と呼ぶ。

モーメントも同様で、同時モーメント、周辺モーメント、条件付きモーメントがある。またそれぞれに原点モーメントと中心モーメントがあり、例えば X と Y の同時原点モーメントは

$$m_{kl}=E\left[X^kY^l\right]\tag{15}$$

同時中心モーメントは

$$\mu_{kl}=E\left[\left(X-\mu_X\right)^k\left(Y-\mu_Y\right)^l\right]\tag{16}$$

などと定められる。上の定義から m_{k0}、m_{0l}、μ_{k0}、μ_{0l} は周辺分布の原点モーメントと中心モーメントに等しくなる。

3　独立性と従属性

2 つの確率変数 $X,\ Y$ が互いに独立とは、

条件付き累積確率と周辺累積確率が一致する $Pr\left[X\le x|Y\le y\right]=Pr\left[X\le x\right]$

条件付き確率と周辺確率が一致する $Pr\left[X=x|Y=y\right]=Pr\left[X=x\right],\ p_{X|Y}\left(x|y\right)=p_X\left(x\right)$

条件付き密度と周辺密度が一致する $f_{X|Y}\left(x|y\right)=f_X\left(x\right)$

同時累積確率が周辺累積確率の積となる $Pr\left[X\le x\,Y\le y\right]=Pr\left[X\le x\right]Pr\left[Y\le y\right],\ F_{XY}\left(x,y\right)=F_X\left(x\right)F_Y\left(y\right)$

同時確率が周辺確率の積となる $Pr\left[X=x\,Y=y\right]=Pr\left[X=x\right]Pr\left[Y=y\right],\ p_{XY}\left(x,y\right)=p_X\left(x\right)p_Y\left(y\right)$

同時密度関数が周辺密度関数の積となる $f_{XY}\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$

和のモーメント母関数が周辺モーメント母関数の積となる $M_{X+Y}\left(t\right)=M_X\left(t\right)M_Y\left(t\right)$

積の期待値が期待値の積になる $E\left[h_1\left(X\right)h_2\left(Y\right)\right]=E\left[h_1\left(X\right)\right]E\left[h_2\left(Y\right)\right]$

などが成り立つこと。互いに独立であれば、同時分布が周辺分布の積となることから、確率や期待値を計算するときの和の計算 $\sum$ や積分の計算 $\int$ の次元が低くて済む。そのため、少しずつ計算が単純、あるいは簡単になるなど、計算量や考えるべき組み合わせの数が減る。

2 つの確率変数 $X,\ Y$ が互いに従属とは、独立でないことを指して言う。従属の時には、確率や期待値を計算する際に、従属な確率変数の次元の分だけの総和の計算や重積分の計算が必要となる。

同時中心モーメントの

$$\mu_{kl}=E\left[\left(X-\mu_X\right)^k\left(Y-\mu_Y\right)^l\right]\tag{17}$$

のうち、次数が最も低い $\mu_{11}=E\left[\left(X-\mu_X\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right]$ は、X と Y の共分散と呼ばれる。

4　マルコフ性

従属性の最も単純な仮定のひとつがマルコフ性。

確率論　第７週　同時分布

学籍番号 ____________________ 氏名 ____________________

7. 同時分布の取り扱いの練習
参考書の p.47 の問題 3.3 および問題 3.4

3.3 (1) 計算せよ。

$F_X(x) =$

$F_Y(y) =$

Ans. $F_{XY}(x, y) =$ ____________________

(1) 独立でないことを確認せよ

Ans. $F_{XY}(x, y) =$ ____________________

(2) 計算せよ。

Ans. $\rho(X, Y) =$ ____________________

3.4 (1) 期待値の定義から計算で導け。

Ans. $Cov(X_1, X_2) =$ ____________________

(2) 期待値の定義から計算で導け。

Ans. $\rho(Y_1, Y_2) =$ ____________________

連絡 学籍番号が 12 以外で始まる学生が、4 限の確率論の講義の履修を希望する場合、今年度は 5 限に上級科目を履修する場合のみ許可する。それ以外の学生は必ず 5 限を履修すること。(なお参考までに次年度以降はいかなる理由でも許可しない。)

レポートの提出要領は次の通り。

課題番号	#7 (2013.05.30 出題)
提出期限	2013 年 6 月 3 日 午後 4 時 30 分
提出場所	西 5 号館 3 階総合情報学科事務室の向かい側の集合ポスト (「確率論」あるいは「応用数学Ｂ」とある投函口)
様　　式	本紙、Ａ４もしくはＢ５（ルーズリーフ可、両面可）
そ の 他	丸写しは採点していて飽きるし、剽窃は自分のためにならない 各自が自力で取り組むことを、切に願う 成書を参考にするなとは言わないが、参考にした書籍があれば、著者への礼儀として必ず記すこと 表紙はつけないこと １ページ目の上部に、「講義名」「レポート番号」「学籍番号」「氏名」「投函日」を記すこと

確率論　第７週　同時分布

学籍番号 ________________　氏名 ________________

7. 同時分布の取り扱いの練習
参考書の p.47 の問題 3.3 および問題 3.4

3.3 (1) 計算せよ。

$F_X(x) =$

$F_Y(y) =$

Ans. $F_{XY}(x, y) =$ ________________

(1) 独立でないことを確認せよ

Ans. $F_{XY}(x, y) =$ ________________

(2) 計算せよ。

Ans. $\rho(X, Y) =$ ________________

3.4 (1) 期待値の定義から計算で導け。

Ans. $Cov(X_1, X_2) =$ ________________

(2) 期待値の定義から計算で導け。

Ans. $\rho(Y_1, Y_2) =$ ________________

<u>連絡</u> 学籍番号が 12 以外で始まる学生が、4 限の確率論の講義の履修を希望する場合、今年度は 5 限に上級科目を履修する場合のみ許可する。それ以外の学生は必ず 5 限を履修すること。(なお参考までに次年度以降はいかなる理由でも許可しない。)

レポートの提出要領は次の通り。

課題番号	#7 (2013.05.30 出題)
提出期限	2013 年 6 月 3 日 午後 4 時 30 分
提出場所	西 5 号館 3 階総合情報学科事務室の向かい側の集合ポスト (「確率論」あるいは「応用数学Ｂ」とある投函口)
様　　式	本紙、Ａ４もしくはＢ５（ルーズリーフ可、両面可）
そ の 他	丸写しは採点していて飽きるし、剽窃は自分のためにならない 各自が自力で取り組むことを、切に願う 成書を参考にするなとは言わないが、参考にした書籍があれば、著者への礼儀として必ず記すこと 表紙はつけないこと １ページ目の上部に、「講義名」「レポート番号」「学籍番号」「氏名」「投函日」を記すこと