7 juillet 2012
PROB #8

確率論 (*Probability Theory*) 第 8 週

w.yamamoto

1 期待値の計算 (確認)

期待値の計算は、確率分布に関する様々な特徴量の導出に用いられる。期待値を計算しない限り、確率変数は確率変数のままであり、確率変数の関数も同様。

1.1 ひとつの確率変数について

標本空間が $\mathcal{X}$ 上の確率変数 X が、累積分布関数 $F_X(x)$ を持つとする。確率変数の関数 $h(X)$ を考える。

X の標本空間 $\mathcal{X}$ が離散集合で、この上で確率関数 $p(x)$ を持つとき、$h(X)$ の期待値は

$$E_X[h(X)] = \sum_{k\in\mathcal{X}} h(k)\,p(k) \tag{1}$$

と求めることができる。X の標本空間 $\mathcal{X}$ が連続集合で、この上で確率密度関数 $f(x)$ を持つなら、

$$E_X[h(X)] = \int_{u\in\mathcal{X}} h(u)\,f(u)\,du \tag{2}$$

となる。

$h_1(X) = X$ と置くと、期待値 (あるいは原点まわりの 1 次のモーメント) を、

$$\begin{aligned} E_X[h_1(X)] &= \int_{k\in\mathcal{X}} h_1(k) \\ &= \mu_1 \end{aligned} \tag{3}$$

もしくは

$$\begin{aligned} E_X[h_1(X)] &= \int_{x\in\mathcal{X}} h_1(x)\,dx \\ &= \mu_1 \end{aligned} \tag{4}$$

と求められる。

また $h_2(X) = (X-\mu_1)$ と置くと、分散 (あるいは平均値まわりの 2 次のモーメント) を

$$\begin{aligned} E_X[h_2(X)] &= \sum_{k\in\mathcal{X}} h_2(k) \\ &= \sigma^2 = \mu_2 \end{aligned} \tag{5}$$

もしくは

$$\begin{aligned} E_X[h_2(X)] &= \int_{x\in\mathcal{X}} h_2(x)\,f(x)\,dx \\ &= \sigma^2 = \mu_2 \end{aligned} \tag{6}$$

と得る。

最後に、$h_0(X) = I(X \le x_0)$[1]とすると、$I(k \le x_0)$ は k が x_0 以下で 1、x_0 を超えると 0 となる。これを用いると、

$$
\begin{aligned}
E_X[h_0(X)] &= E_X[I(X \le x_0)] \\
&= \sum_{k \in \mathcal{X}} I(k \le x_0)\, p(k) \\
&= \sum_{k \le x_0} p(k) \quad (\because \text{上の } \textstyle\sum_{k\in\mathcal{X}} \text{ は } I(k \le x_0) \text{ と組み合わせると、} \textstyle\sum_{k \le x_0} \text{ と等しくなる}) \\
&= Pr[X \le x_0] \\
&= F_X(x_0)
\end{aligned}
$$

と、X の累積分布関数を得る。連続確率変数についても同様に

$$
\begin{aligned}
E_X[h_0(X)] &= E_X[I(X \le x_0)] \\
&= \int_{x \in \mathcal{X}} I(x \le x_0)\, f(x)\, dx \\
&= \int_{x \le x_0} f(x)\, dx \quad (\because \text{上の } \textstyle\int_{x\in\mathcal{X}} \text{ は } I(x \le x_0) \text{ と組み合わせると、} \textstyle\int_{x \le x_0} \text{ と等しくなる}) \\
&= Pr[X \le x_0] \\
&= F_X(x_0)
\end{aligned}
$$

と、X の累積分布関数を得る。

その他、期待値に関して、次の計算ルールは憶えて置くと良い。

1. a, b を任意の定数として、$E[aX + b] = aE[X] + b$ (期待値の線形性)
2. a を任意の定数として、$V[aX] = a^2 V[X]$ (尺度変換の分散の平方性)

1.2 ２つの確率変数について

２つの確率変数 X, Y が互いに独立のとき、

$$
\begin{aligned}
E_{X,Y}[h(X,Y)] &= \int_{x\in\mathcal{X}} \int_{y\in\mathcal{Y}} h(x,y)\, f(x)\, g(y)\, dxdy \\
&= \int_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \int_{y\in\mathcal{Y}} h(x,y)\, g(y)\, dy \right\} f(x)\, dx \\
&= \int_{y\in\mathcal{Y}} \left\{ \int_{x\in\mathcal{X}} h(x,y)\, f(x)\, dx \right\} g(y)\, dy
\end{aligned} \tag{7}
$$

あるいは

$$
E_{X,Y}[h(X,Y)] = \sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{y\in\mathcal{Y}} h(x,y)\, p(x)\, q(y) \tag{8}
$$

となる。

独立でなければ、２つの確率変数 X, Y の組に対して、双方が同治に x 以下および y 以下になる確率を

$$
F_{X,Y}(x,y) = Pr_{X,Y}[X \le x \text{ and } Y \le y] \tag{9}
$$

[1] $I(A)$ は命題を引数にとる関数で、A が真であれば 1 を、A が偽であれば 0 であれば 0 を取る。この関数 $I(A)$ は識別関数と呼ばれる。

と定める。これを 同時累積分布関数 と言う。X と Y の標本空間 $\mathcal{X}$ および $\mathcal{Y}$ がどちらも連続集合の時、確率変数の組 (X, Y) の標本空間は $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ の直積空間 $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ でなければならない。これは同時累積分布関数の定義域でもある。

$\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ が離散集合のとき、(X, Y) は離散確率変数であり、

$$\begin{aligned} F_{X,Y} &= Pr\left[X \leq x \ \text{ and } \ Y \leq y\right] \\ &= \sum_{k \leq x} \sum_{l \leq y} p(k, l) \end{aligned} \tag{10}$$

を満たす関数 $p(x, y)$ が存在するとき、これを X と Y の 同時確率関数 と呼ぶ。

$\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ が連続集合のとき、(X, Y) は連続確率変数であり、重積分

$$\begin{aligned} F_{X,Y} &= Pr\left[X \leq x \ \text{ and } \ Y \leq y\right] \\ &= \int_{u \leq x} \int_{v \leq y} f(u, v)\, dudv \end{aligned} \tag{11}$$

を満たす関数 $f(x, y)$ が存在するとき、これを X と Y の 同時確率密度関数 と呼ぶ。この重積分は

$$\begin{aligned} \int_{u \leq x} \int_{v \leq y} f(u, v)\, dudv &= \int_{u \leq x} \int_{v \leq y} f(u, v)\, dvdu = \int_{u \leq x} \left\{ \int_{v \leq y} f(u, v)\, dv \right\} du \\ &= \int_{v \leq y} \int_{u \leq x} f(u, v)\, dudv = \int_{v \leq y} \left\{ \int_{u \leq x} f(u, v)\, du \right\} dv \end{aligned}$$

のいずれかを用いて表す。

例えば $h_0(x, y) = I(x \leq x_0)\, I(y \leq y_0)$ と定めると、

$$\begin{aligned} E_{X,Y}\left[h_0(X, Y)\right] &= \sum_{k \in \mathcal{X}} \sum_{l \in \mathcal{Y}} h_0(k, l)\, p(k)\, q(l) \\ &= \sum_{k \leq x_0} \sum_{l \leq y_0} p(k)\, q(l) \\ &= Pr\left[X \leq x_0 \ \text{ and } \ Y \leq y_0\right] \\ &= F(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{12}$$

と同時累積分布関数を得る。

1.3　２つの確率変数の独立性

２つの確率変数 X, Y が互いに独立とは、次の何れかが成り立つことである。

1. $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y)$
2. $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$ もしくは $p_{X,Y}(k, l) = p_X(k)\, p_Y(l)$

互いに独立なとき、次の計算が成り立つ。

1. $E_{X,Y}\left[g(X)\, h(Y)\right] = E_X\left[g(X)\right] E_Y\left(\left[h(Y)\right]\right.$ (期待値の乗法性)
2. $V_{X,Y}\left[g(X) + h(Y)\right] = V_X\left[g(X)\right] + V_Y\left(\left[h(Y)\right]\right.$ (分散の加法性)
3. $M_{X+Y}(t) = M_X(t)\, M_Y(t)$ (和のモーメント母関数の乗法性)

2　確率分布

2.1　ポアソン分布

ポアソン分布は、繰り返し発生する事象が、与えられた時間内に発生する回数の確率分布である。この分布の確率関数は

$$Pr[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \tag{13}$$

で与えられるが、この式には

1. 独立性：事象の発生は互いに独立かつ、過去の発生履歴とは無関係
2. 定常性：事象の発生確率は時点 (時間帯) によって変化しない
3. 希少性：微小時間に 2 回以上の起こる確率は無視できる

という仮定を伴っていることを忘れてはならない。
確率やモーメントの計算については、前回のメモの通り。

2.2　ガンマ分布

ガンマ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ は、確率密度関数を

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0 \tag{14}$$

とする、$(0,\infty)$ 上の連続確率分布である。これは (完全) ガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{15}$$

から定まる確率分布である。左辺の積分が有限の範囲 $(0,s)$ のとき、この積分を不完全ガンマ関数と言う。
#7-2 ガンマ分布の平均は

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x f(x) dx \\ &= \int_0^\infty x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned} \tag{16}$$

と求まる。分散は、X^2 の期待値から求める。

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \int_0^\infty x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^\infty x^2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^{\alpha+2}} \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} \end{aligned} \tag{17}$$

より、

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2 \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2} \end{aligned} \tag{18}$$

を得る。

ガンマ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ のモーメント母関数は

$$\begin{aligned} M_{\Gamma(\alpha,\beta)}(t) &= E_{\Gamma(\alpha,\beta)}[\exp(tX)] \\ &= \int_0^\infty e^{tx}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(\beta-t)x}dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \left(\frac{u}{\beta-t}\right)^{\alpha-1} e^{-u}\frac{1}{\beta-t}du \quad \text{ここで } u=(\beta-t)x\,,\ x=u/(\beta-t) \text{ と変数変換} \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\beta-t}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{\beta-t}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-u}du \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\beta-t}\right)^{\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-u}du \\ &= \frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-u}du \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha \end{aligned} \tag{19}$$

となる。

ガンマ分布の累積分布関数は、α が正の整数の場合は陽な表現を得ることができる。第 1 種不完全ガンマ関数を $\gamma(\alpha,x)$ と置く。

$$\gamma(\alpha,x) = \int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt \tag{20}$$

部分積分を用いると第 1 種不完全ガンマ関数の間には、

$$\begin{aligned} \gamma(1,x) &= 1-e^{-x} \\ \gamma(\alpha+1,x) &= \alpha\gamma(\alpha,x) - x^\alpha e^{-x} \end{aligned} \tag{21}$$

という関係が成り立つことが分かる。第 2 種不完全ガンマ関数の間にも同様の関係が成り立つ。

この関係を用いると、α が自然数 k で、$\beta=1$ の場合に、$\Gamma(n)=(n-1)!$ などを用いて

$$1-F_{\Gamma(k,1)}(x) = \exp(-x)\left\{1+\frac{x}{1!}+\cdots++\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right\} \tag{22}$$

が示せる。同様に β が任意の正の実数の場合にも、

$$1-F_{\Gamma(k,\beta)}(x) = \exp(-\beta x)\left\{1+\frac{\beta x}{1!}+\cdots++\frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!}\right\}$$

が示せる。よって、α が整数 k の場合のガンマ分布の累積分布関数は

$$F_{\Gamma(k,\beta)}(x) = 1-\exp(-\beta x)\left\{1+\frac{\beta x}{1!}+\cdots+\frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!}\right\} \tag{23}$$

となる。

2.3　ベータ分布

ベータ分布 $B(\alpha,\beta)$ は、確率密度関数を

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \ \ 0 < x < 1 \tag{24}$$

とする、$(0,1)$ 上の連続確率分布である。これはベータ関数

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \ \ x>0, \ y>0. \tag{25}$$

から定まる確率分布である。

2.4　ベルヌーイ試行と幾何分布と負の二項分布

二項分布は n 回の試行の中での成功回数 X の確率分布であった。今度は、1 回成功するまでに連続して失敗する回数 Y の確率分布を考える。

再び、ベルヌーイ試行を繰り返すことを考える。成功確率 p のベルヌーイ試行の確率関数は

$$p(k) = p^k(1-p)^{1-k}, \ k = 0, 1. \tag{26}$$

であった。k 回連続して失敗した後に成功する確率は、ベルヌーイ試行の確率関数と同様に

$$\begin{aligned} Pr[Y=k] &= p_Y(k) \\ &= Pr[X_1 = 0 \ \text{ and } \ X_2 1 = 0 \ \text{ and } \ \ldots \text{ and } \ X_k = 0 \ \text{ and } \ X_{k+1} = 1] \\ &= Pr[X_1 = 0]\,Pr[X_2 = 0]\cdots Pr[X_k = 0]\,Pr[X_{k+1} = 1] \\ &= (1-p)^k p \end{aligned} \tag{27}$$

と求まる。この確率関数を持つ <u>確率分布</u> を幾何分布と言う。幾何分布の定義は前述の通り、「1 回成功するまでに連続して失敗する回数 Y の確率分布」である。この確率関数の形状は、参考書 p.63 の図 5.3 および 5.4 を参照のこと。

幾何分布の期待値は

$$\begin{aligned} E_Y[Y] &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_Y(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k p (1-p)^k \\ &= p(1-p)\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p(1-p)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial (1-p)^k}{\partial (1-p)} \\ &= p(1-p)\frac{\partial \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k}{\partial(1-p)} \\ &= p(1-p)\frac{\partial (1-(1-p))^{-1}}{\partial(1-p)} \\ &= \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{1-p}{p} \end{aligned} \tag{28}$$

モーメント母関数も $t < \log(1-p)^{-1}$ の範囲で

$$M_Y(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t} \tag{29}$$

と求まる。分散の計算を飛ばしたのは、参考書によれば、モーメント母関数から求める方が簡単なため。(今日の課題 8-1 および 8-2)

次に幾何分布を少し一般化する。独立なベルヌーイ試行の繰り返し $X_1, X_2, \ldots$ の中で、通算で r 回の成功が起こるまでに失敗した回数を Z とする。幾何分布は $r = 1$ の場合に相当するし、実は幾何分布に従う独立な確率変数を $Y_1, \ldots, Y_r$ とすると、負の二項分布は $ZY = Y_1 + \cdots + Y_r$ 個の従う確率分布とも言える。

「$Z = k$」という事象は、「$k + r - 1$ 回の試行を終えた時点で $r - 1$ 回の成功が起きていて、$k + r$ 回目の試行で r 回目の試行が起こる」事象とも言える。$X_1, X_2, \ldots$ は各試行回で成功していれば 1、失敗していれば 0 であることを思い出せば、

$$Pr[Z = k] = Pr[X_1 + X_2 + \cdots + X_{k+r-1} = r - 1 \text{ and } X_{k+r} = 1] \tag{30}$$

となる。これは $X_i, i = 1, 2, \ldots$ が互いに独立なことから、

$$\begin{aligned} Pr[Z = k] &= Pr[X_1 + X_2 + \cdots + X_{k+r-1} = r - 1]\, Pr[X_{k+r} = 1] \\ &= \left[{}_{k+r-1}C_{r-1}\, p^{r-1} (1-p)^k\right]\left[p^1 (1-p)^0\right] \\ &= {}_{k+r-1}C_{r-1}\, p^r (1-p)^k \end{aligned} \tag{31}$$

この確率関数を持つ確率分布を <u>負の二項分布</u> という。負の二項分布の確率関数の例は、参考書 p.65 の図 5.5 および 5.6 を参照のこと。

負の二項分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[Z] = \frac{r(1-p)}{p} \tag{32}$$

$$V[Z] = \frac{r(1-p)}{p^2} \tag{33}$$

となる。モーメント母関数は、負の二項分布が幾何分布の和の分布であることを利用して、$t < \log(1-p)^{-1}$ の範囲で

$$M_Z(t) = \left\{\frac{p}{1 - (1-p)e^t}\right\}^r \tag{34}$$

となる。

2.5 指数分布とガンマ分布の関係

ある事象の発生間隔 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が互いに独立な指数分布 $Exp(\lambda)$ に従っているとする。この時 $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ が従う確率分布を考える。

指数分布のモーメント母関数は、前々回の課題より

$$M_{X_i}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \tag{35}$$

であった。すると、これらの和 Y_n が従う確率分布は

$$M_{Y_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{\lambda^n}{(\lambda - t)^n} \tag{36}$$

となる。これをモーメント母関数に持つ確率分布を探せば良いが、前回に講義で説明したように、モーメント母関数を求める変換の逆変換は整備されていない。しかしこれがガンマ分布のモーメント母関数であることを知っていれば、和 Y_n がガンマ分布に従うと言える。

実際、式 (36) と式 (19) を見比べると、Y_n の従う確率分布は、パラメータが $\alpha = n$、$\beta = \lambda$ のガンマ分布であることが分かる。

2.6 指数分布とポアソン分布の関係

ある事象の発生間隔 X_i が互いに独立な指数分布 $Exp(\lambda)$ に従っているとする。このとき期間 T の間にその事象が発生する回数 Z は、どのような確率分布に従うかを考える。[2]

ここでの標本空間は

$$\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{37}$$

と非負の整数全体となる。「$Z = k$」で、「期間 T の間に k 回の事象が発生する」事象を表す。一方でこの事象は、「最初の k 回の事象発生間隔の和 Y_k が T 以下、かつ次の発生回数を加えた和 Y_{k+1} は T を超える」と記しても、同じことである。

$$\begin{aligned} Pr[Z = k] &= Pr[Y_k \leq T \text{ and } Y_{k+1} > T] \\ &= F_{Y_k}(T) - F_{Y_{k+1}}(T) \\ &= F_{\Gamma(k,\lambda)}(T) - F_{\Gamma(k+1,\lambda)}(T) \end{aligned}$$

２つ目の等式の詳細はここでは省略。

ところで Y_k の確率分布は k が整数であれば、前掲の通り、ガンマ分布となる。よってこのまま計算を続ければ、

$$\begin{aligned} Pr[Z = k] &= F_{\Gamma(k,\lambda)}(T) - F_{\Gamma(k+1,\lambda)}(T) \\ &= 1 - \exp(-\beta x)\left\{1 + \frac{\beta x}{1!} + \cdots + \frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!}\right\} - \left[1 - \exp(-\beta x)\left\{1 + \frac{\beta x}{1!} + \cdots + \frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(\beta x)^k}{(k)!}\right\}\right] \\ &= \exp(-\beta x)\frac{(\beta x)^k}{(k)!} \end{aligned} \tag{38}$$

２つ目の等式は式 (23) を用いた。

3 講義の内容の確認 (暫定版)

この講義は、前半が確率と確率分布に関する数学 (確率数学？) の基礎、後半がその基礎の上に積み上げられる理論体系の入門、となっている。前半の要件は、端的にまとめると

- 離散事象に関する種々の確率計算ができること
- 確率分布の取り扱いに慣れること、特に幾つかの確率分布に関して期待値、分散などのモーメントや、モーメント母関数、独立な確率変数の和の分布などが計算できること

となる。後半の要件に対して、前半の要件は前提となるので、前半の内容は押さえて折り返して欲しい。

3.1 前半 (中間試験の範囲)

1. 確率事象と確率変数と確率分布
   (a) 確率の公理
   (b) 確率の計算法則
   (c) 互いに独立な事象と互いに独立でない事象
   (d) 同時確率と条件付き確率と周辺確率

[2] この箇所は、参考書が p.70-71 で、ポアソン分布から指数分布を導出しているのに対して、ここでは指数分布からポアソン分布を導出をしている。両者とも、本質的には同じ議論である。

(e) ベイズの定理

2. 離散確率分布と連続確率分布

   (a) 離散確率変数：累積分布関数、確率関数、期待値の計算方法
   (b) 連続確率変数：累積分布関数、確率密度関数、期待値の計算方法

3. 確率分布に関する計算

   (a) 期待値
   (b) 標準化
   (c) モーメントとモーメント母関数
   (d) 独立性と和や積の分布
   (e) 和の分布とモーメント母関数

4. 確率分布と確率計算の例 (離散確率分布)

   (a) ベルヌーイ試行と二項分布
   (b) ポアソン分布
   (c) ベルヌーイ試行と幾何分布と負の二項分布

5. 確率分布と確率計算の例 (連続確率分布)

   (a) 指数分布
   (b) ガンマ分布
   (c) ベータ分布

3.2 後半 (期末試験の範囲)

前半に出てきた確率分布は、計算の過程で用いることはある。

1. 確率分布に関する幾つかの不等式

   (a) マルコフ (Markov) の不等式
   (b) チェビシェフ (Chebychev) の不等式
   (c) イェンセン (Jensen) の不等式
   (d) ヘルダー (Hoelder) の不等式
   (e) シュワルツ (Schwartz) の不等式

2. 多次元の確率変数の同時分布と条件付き分布と周辺分布

3. 多次元の確率変数の期待値とモーメントとモーメント母関数

4. 条件付き期待値と条件付き分散

   (a) 共分散
   (b) 相関係数

5. 確率分布と確率計算の例 (離散確率分布)

(a) 多項分布

(b) 超幾何分布

(c) マルコフ過程？

6. 確率分布と確率計算の例 (連続確率分布)

   (a) 正規分布

7. 数列の収束と確率分布の収束

   (a) 大数の法則

   (b) 中心極限定理

4 レポート略解

#7-1 ガンマ関数とベータ関数の関係は

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

#7-2 は今日のノートで解説済み。
#7-3 ベータ分布の期待値は

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx \\ &= \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{aligned} \tag{39}$$

2 乗の期待値は

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= \int_0^1 x^2 \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \\ &= \frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} \end{aligned} \tag{40}$$

となり、分散は

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2 \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \end{aligned} \tag{41}$$

と求まる。
#7-4 も今日のノートで解説済み。

5　レポート課題

#8-1 幾何分布のモーメント母関数を求めよ。

#8-2 幾何分布の分散を求めよ。

#8-3 参考書 p.24 のチェビシェフの不等式の証明をフォローせよ。

#8-4 マルコフの不等式、を調べ、不等式とその証明を記せ。

6　レポート提出要領

下記の要領でレポートを作成し、提出すること。

課題番号	#8 (2012.06.07 出題)
提出期限	2012 年 6 月 11 日 午後 4 時 30 分
提出場所	西 5 号館 3 階総合情報学科事務室前の集合ポストの「確率論」とある投函口
様　　式	Ａ４もしくはＢ５（ルーズリーフ可、両面可）
そ の 他	丸写しは採点していて飽きるし、剽窃は自分のためにならない 各自が自力で取り組むことを、切に願う 成書を参考にするなとは言わないが、参考にした書籍があれば、著者への礼儀として必ず記すこと 表紙はつけないこと １ページ目の上部に、「講義名」「レポート番号」「学籍番号」「氏名」「投函日」を記すこと

下記は見本である。

提出日:2012/06/11

確率論レポート #8

学籍番号:0000000
氏　　名:電通　大

課題#8-1

参考文献

[1] 微分積分学の教科書.

[2] 永田靖 (2005) 「統計学のための数学入門 30 講」朝倉書店.

[3] 宮川雅巳 (1988) 「統計技法」 共立出版.

[4] 稲垣宣生 (2003) 「数理統計学」改訂版, 裳華房.