確率論 (*Probability Theory*) 同時分布

w.yamamoto

1 2次元の確率変数のための確率分布

確率変数が 1 つの場合は簡単。試行 1 回の結果の確率モデル。以下は、標本空間 $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ の全要素 (x, y) の間に順序が定められている場合の定義。

累積確率 $F(x, y) = Pr[X \leq x,\ Y \leq y]$

連続分布 $Pr[X \leq x,\ Y \leq y] = \int_{-\infty}^{x} \int_{-infty}^{y} f_{XY}(u, v)\, dudv$

離散分布 $Pr[X \leq x,\ Y \leq y] = \sum_{-\infty}^{x} \sum_{-infty}^{y} p_{XY}(u, v)\, dudv$

確率関数 $p(x,\ y) = Pr[X = x,\ X = y] = F(x, y) - F(x-, y) - F(x, y-) + F(x-, y-)$

確率密度関数 $f(x, \,) = \partial^2 F(x) / \partial x \partial y$ ($F(x)$ の 2 階の偏微分)

期待値は、どの分布についての期待値を計算するかで、呼び名や定義が異なる。同時分布についての期待値は

$$E[h(X, Y)] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h(x, y)\, p(x, y) & \text{離散の場合} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\, f(x, y)\, dxdy & \text{連続の場合} \end{cases} \tag{1}$$

周辺分布についての期待値は、例えば X の周辺分布に関して

$$E[h(X, Y)] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h(x, Y)\, p(x) & \text{離散の場合} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, Y)\, f(x)\, dx & \text{連続の場合} \end{cases} \tag{2}$$

となり、これを周辺期待値と呼ぶ。

条件付き分布についての期待値は、例えば $X|Y = y$ については

$$E[h(X, Y)] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} h(x, y)\, p(x|y) & \text{離散の場合} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\, f(x|y)\, dx & \text{連続の場合} \end{cases} \tag{3}$$

となり、これを条件付き期待値と呼ぶ。

モーメントも同様で、同時モーメント、周辺モーメント、条件付きモーメントがある。またそれぞれに原点モーメントと中心モーメントがあり、例えば X と Y の同時原点モーメントは

$$m_{kl} = E\left[X^k Y^l\right] \tag{4}$$

同時中心モーメントは

$$\mu_{kl} = E\left[(X - \mu_X)^k (Y - \mu_Y)^l\right] \tag{5}$$

などと定められる。上の定義から m_{k0}、m_{0l}、μ_{k0}、μ_{0l} は周辺分布の原点モーメントと中心モーメントに等しくなる。

2　独立性と従属性

2 つの確率変数 $X,\ Y$ が互いに独立とは、

条件付き累積確率と周辺累積確率が一致する $Pr\left[X \leq x | Y \leq y\right] = Pr\left[X \leq x\right]$

条件付き確率と周辺確率が一致する $Pr\left[X = x | Y = y\right] = Pr\left[X = x\right],\ p_{X|Y}\left(x|y\right) = p_X\left(x\right)$

条件付き密度と周辺密度が一致する $f_{X|Y}\left(x|y\right) = f_X\left(x\right)$

同時累積確率が周辺累積確率の積となる $Pr\left[X \leq x\ Y \leq y\right] = Pr\left[X \leq x\right] Pr\left[Y \leq y\right],\ F_{XY}\left(x, y\right) = F_X\left(x\right) F_Y\left(y\right)$

同時確率が周辺確率の積となる $Pr\left[X = x\ Y = y\right] = Pr\left[X = x\right] Pr\left[Y = y\right],\ p_{XY}\left(x, y\right) = p_X\left(x\right) p_Y\left(y\right)$

同時密度関数が周辺密度関数の積となる $f_{XY}\left(x, y\right) = f_X\left(x\right) f_Y\left(y\right)$

和のモーメント母関数が周辺モーメント母関数の積となる $M_{X+Y}\left(t\right) = M_X\left(t\right) M_Y\left(t\right)$

積の期待値が期待値の積になる $E\left[h_1\left(X\right) h_2\left(Y\right)\right] = E\left[h_1\left(X\right)\right] E\left[h_2\left(Y\right)\right]$

などが成り立つこと。互いに独立であれば、同時分布が周辺分布の積となることから、確率や期待値を計算するときの和の計算 $\sum$ や積分の計算 $\int$ の次元が低くて済む。そのため、少しずつ計算が単純、あるいは簡単になるなど、計算量や考えるべき組み合わせの数が減る。

2 つの確率変数 $X,\ Y$ が互いに従属とは、独立でないことを指して言う。従属の時には、確率や期待値を計算する際に、従属な確率変数の次元の分だけの総和の計算や重積分の計算が必要となる。

同時中心モーメントの

$$\mu_{kl} = E\left[\left(X - \mu_X\right)^k \left(Y - \mu_Y\right)^l\right] \tag{6}$$

のうち、次数が最も低い $\mu_{11} = E\left[\left(X - \mu_X\right)\left(Y - \mu_Y\right)\right]$ は、X と Y の共分散と呼ばれる。

3　変数変換後の分布

狭義の単調関数 $h\left(\cdot\right)$ を用いて、$Z = h\left(X\right)$ と変換したときの Z の従う確率分布は、X の確率分布が離散分布か連続分布か、で扱いが異なる。

離散分布なら、

$$Pr\left[X = x\right] = Pr\left[h\left(X\right) = j\left(x\right)\right] \tag{7}$$

なので、確率関数は

$$P_Z\left(z\right) = P_X\left(h^{-1}\left(x\right)\right) \tag{8}$$

となる。期待値などモーメントの計算も累積分布関数の計算もすべて、上の確率関数に基づけばよい。たとえば $h\left(x\right) = \exp\left(x\right)$ を考えてみよ。

連続分布の場合には、「置換積分 (積分における変数変換)」を考えなければならない。

$$f_Z\left(z\right) = f_X\left(h^{-1}\left(z\right)\right) \tag{9}$$

と定めると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Z\left(z\right) dz = 1 \tag{10}$$

が保証されない。被積分変数を $x = h^{-1}\left(z\right)$ と置換 (変数変換) した場合は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{h^{-1}\left(z\right)\right\} f_X\left(h^{-1}\left(z\right)\right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(x\right) dx = 1 \tag{11}$$

より、Z の確率分布の密度関数は

$$f_Z\left(z\right) = \left\{h^{-1}\left(z\right)\right\} f_X\left(h^{-1}\left(z\right)\right) \tag{12}$$

でなければならない。

4　和の分布

$X + Y$ の分布は、X と Y の同時分布が離散分布の場合

$$Pr\left[X + Y = k\right] = \sum_{x,y:} \sum_{x+y=k} p_{XY}\left(x, y\right) \tag{13}$$

で求める。

連続分布の場合は

$$\begin{aligned} f_{X+Y}\left(u\right) &= \int\int x + y = u f_{XY}\left(x, y\right) dxdy \\ &= \int_{-infty}^{\infty} f_{XY}\left(x, u - x\right) dx \end{aligned} \tag{14}$$

で求める。この計算をたたみ込み、と呼ぶことがある。

もし X と Y が互いに独立で、それぞれの周辺分布のモーメント母関数が容易に求まる、もしくは既知なら、

$$M_{X+Y}\left(t\right) = M_X\left(t\right) M_Y\left(t\right) \tag{15}$$

の関係を用いて、和の分布が簡単に求められる場合がある。

5　マルコフ性

従属性の最も単純な仮定のひとつがマルコフ性。

確率論　第８週　モーメント母関数

学籍番号 ____________________ 氏名 ____________________

8. モーメントとモーメント母関数の計算

8.1 次の密度関数を持つ確率分布を指数分布という。

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{16}$$

ただし λ 正の定数。

(1) 指数分布の期待値を計算せよ。

Ans. $E[X] =$ ____________________

(2) 指数分布の分散を計算せよ。

Ans. $V[X] =$ ____________________

(3) 指数分布のモーメント母関数を計算せよ。

Ans. $M_X(t) =$ ____________________

(4) X が $f_X(x, \lambda_1)$、Y が $f_X(y, \lambda_2)$ の密度関数を持つ指数分布に、それぞれ互いに独立に従うとき、$X + Y$ の確率分布のモーメント母関数を計算せよ。

Ans. $M_{X+Y}(t) =$ ____________________

(5) 上のモーメント母関数を持つ確率分布は、どんな密度関数を持つか？

Ans. $f_{X+Y}(t) =$ ____________________

8.2 次の確率関数を持つ確率分布をベルヌーイ分布という。

$$p_X(x; \lambda) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1 - p, & x = 0 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{17}$$

(1) ベルヌーイ分布の期待値を計算せよ。

Ans. $E[X] =$ ______

(2) ベルヌーイ分布の分散を計算せよ。

Ans. $V[X] =$ ______

(3) ベルヌーイ分布のモーメント母関数を計算せよ。

Ans. $M_X(t) =$ ______

(4) X が $p_X(x, \lambda_1)$、Y が $f_X(y, \lambda_2)$ の密度関数を持つ指数分布に、それぞれ互いに独立に従うとき、$X+Y$ の確率分布のモーメント母関数を計算せよ。

Ans. $M_{X+Y}(t) =$ ______

(5) 上のモーメント母関数を持つ確率分布は、どんな確率関数を持つか？

Ans. $p_{X+Y}(t) =$ ______

レポートの提出要領は次の通り。

課題番号	#8 (2013.06.06 出題)
提出期限	2013 年 6 月 10 日 午後 4 時 30 分
提出場所	西 5 号館 3 階総合情報学科事務室の向かい側の集合ポスト (「確率論」あるいは「応用数学Ｂ」とある投函口)
様　　式	本紙、Ａ４もしくはＢ５（ルーズリーフ可、両面可）
そ の 他	丸写しは採点していて飽きるし、剽窃は自分のためにならない 各自が自力で取り組むことを、切に願う 成書を参考にするなとは言わないが、参考にした書籍があれば、著者への礼儀として必ず記すこと 表紙はつけないこと １ページ目の上部に、「講義名」「レポート番号」「学籍番号」「氏名」「投函日」を記すこと

確率論　第８週　モーメント母関数

学籍番号 ____________________ 氏名 ____________________

8. モーメントとモーメント母関数の計算

8.1 次の密度関数を持つ確率分布を指数分布という。

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{18}$$

ただし λ 正の定数。

(1) 指数分布の期待値を計算せよ。

Ans. $E[X] =$ ____________________

(2) 指数分布の分散を計算せよ。

Ans. $V[X] =$ ____________________

(3) 指数分布のモーメント母関数を計算せよ。

Ans. $M_X(t) =$ ____________________

(4) X が $f_X(x, \lambda_1)$、Y が $f_X(y, \lambda_2)$ の密度関数を持つ指数分布に、それぞれ互いに独立に従うとき、$X + Y$ の確率分布のモーメント母関数を計算せよ。

Ans. $M_{X+Y}(t) =$ ____________________

(5) 上のモーメント母関数を持つ確率分布は、どんな密度関数を持つか？

Ans. $f_{X+Y}(t) =$ ____________________

8.2 次の確率関数を持つ確率分布をベルヌーイ分布という。

$$p_X(x;\lambda) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1 - p, & x = 0 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{19}$$

(1) ベルヌーイ分布の期待値を計算せよ。

Ans. $E[X] =$ ________________

(2) ベルヌーイ分布の分散を計算せよ。

Ans. $V[X] =$ ________________

(3) ベルヌーイ分布のモーメント母関数を計算せよ。

Ans. $M_X(t) =$ ________________

(4) X が $p_X(x,\lambda_1)$、Y が $f_X(y,\lambda_2)$ の密度関数を持つ指数分布に、それぞれ互いに独立に従うとき、$X+Y$ の確率分布のモーメント母関数を計算せよ。

Ans. $M_{X+Y}(t) =$ ________________

(5) 上のモーメント母関数を持つ確率分布は、どんな確率関数を持つか？

Ans. $p_{X+Y}(t) =$ ________________

レポートの提出要領は次の通り。

課題番号	#8 (2013.06.06 出題)
提出期限	2013 年 6 月 10 日 午後 4 時 30 分
提出場所	西 5 号館 3 階総合情報学科事務室の向かい側の集合ポスト (「確率論」あるいは「応用数学Ｂ」とある投函口)
様　　式	本紙、Ａ４もしくはＢ５（ルーズリーフ可、両面可）
そ の 他	丸写しは採点していて飽きるし、剽窃は自分のためにならない 各自が自力で取り組むことを、切に願う 成書を参考にするなとは言わないが、参考にした書籍があれば、著者への礼儀として必ず記すこと 表紙はつけないこと １ページ目の上部に、「講義名」「レポート番号」「学籍番号」「氏名」「投函日」を記すこと