2　今回の中間試験について

回答完成後、暇があったら、読んでみてください。今年度の試験の出題意図 (次年度以降も同じとは限りません) を記します。

確率論の試験問題は、計算の仕方を練習して、慣れてくれていることを前提に、出題します。そのため、通常の科目より問題数が多いかもしれません。この科目では、考え方や計算の仕方を身につけてくれることを重視しますので、少々の計算ミスでしたら、減点するものの、それほど深刻な減点にはしません。ただし計算ミスか、誤回答かの判断は、採点者に一任されるものとしますので、計算ミスかそうでないかは分かりやすく書くとよいです。

中間試験は、前半 (確率論の基礎) の部分の理解の確認を主眼におきました。具体的には、確率についての基本的な計算と確率分布についての基本的な計算を、正しく修得しているか、を確認します。今回は秀レベルの問題を入れるのは断念しました。期末試験では、前半の理解を踏まえた問題、後半のみの問題、さらに秀レベルを試す問題も入れます。

- 基礎レベル：これができないと、確率論の単位はあげられません

  1. 確率分布についての基礎知識としての、確率分布と標本空間 (定義域) と各種関数の対応 (20 点)

  3. 確率表に基づく確率計算の問題: 同時分布や条件付き分布についての計算ができることを確認させてください (20 点)

  確率分布間の関係 (1): 講義で紹介した確率分布が互いにどのような関係にあるか、理解しているかを確認させてください (今回は出題せず)

  2. 期待値計算の問題: 任意の確率分布について、必要な積分や総和を書き下せたら、種々の計算ができること、を確認させてください (20 点)

- 確認レベル： これができないと、褒めてはあげられませんが、ぜんぶできても秀とは限りません

  4. 確率分布についての計算の問題：講義で紹介した離散確率分布からランダムに選んで、その分布に固有の計算に習熟していること、を確認させてください (20 点) 確率分布の候補はベルヌーイ試行、二項分布、幾何分布、負の二項分布、ポアソン分布。確率関数は明示すると約束済み 。尋ねるのは期待値、分散、モーメント母関数、モーメント母関数のマクローリン展開、独立な和の分布、など。(20 点)

  5. 確率分布についての計算の問題：講義で紹介した連続確率分布からランダムに選んで、その分布に固有の計算に習熟していること、を確認させてください (20 点) 確率分布の候補は指数分布、ガンマ分布、ベータ分布。確率密度関数は明示すると約束済み。尋ねるのは期待値、分散、モーメント母関数、モーメント母関数のマクローリン展開、独立な和の分布、など。(20 点)

  確率分布間の関係 (2): 講義で紹介した確率分布が互いにどのような関係にあるか、理解しているかを確認させてください (今回は出題せず)

- 少し高いレベル： 今回は、これができたら、凄いなあ、と思います。

  確率分布の特徴 (今回は出題せず)

  応用問題 (今回は出題せず)

  全部完答 (量が多いから、ぜんぶできたら表彰ものです)

3　中間試験問題

解答用紙は最初から 3 枚を受け取り、名前・学籍番号を記せ。大問の解答順序は自由でよい。答案提出時には、使わなかった解答用紙も提出してよい。

1. 次の各確率分布につき、選択肢 1 から該当する確率関数もしくは確率密度関数を、選択肢２から標本空間を選び、解答用紙に記せ。相応しいものが無ければ、その他を選び、相応しいものを記せ。(例えば 1-1 A i. などと回答せよ。横並びでも縦並びでも構わない。) (配点 20 点)

1-1 ベルヌーイ試行　1-2 二項分布　1-3 幾何分布　1-4 負の二項分布
1-5 ポアソン分布　1-6 指数分布　1-7 ガンマ分布　1-8 ベータ分布

選択肢 1 ：確率関数/確率密度関数

$\underline{\text{A}}.\ p(1-p)^k$　$\underline{\text{B}}.\ p^2(1-p)^k$　$\underline{\text{C}}.\ p^k(1-p)^{1-k}$　$\underline{\text{D}}.\ p^k(1-p)^{n-k}$

$\underline{\text{E}}.\ {}_nC_k p^k(1-p)^{n-k-1}$　$\underline{\text{F}}.\ {}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}$　$\underline{\text{G}}.\ {}_{k+r-1}C_{r-1} p^{r-1}(1-p)^k$　$\underline{\text{H}}.\ {}_{k+r}C_r p^{r-1}(1-p)^k$

$\underline{\text{I}}.\ \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$　$\underline{\text{J}}.\ \frac{\lambda^k}{k!}e^{\lambda}$　$\underline{\text{K}}.\ \frac{\lambda^{-k}}{k!}e^{-\lambda}$　$\underline{\text{L}}.\ \frac{\lambda^{-k}}{k!}e^{\lambda}$　$\underline{\text{M}}.\ \lambda e^{-\lambda x}$　$\underline{\text{N}}.\ \lambda e^{\lambda x}$　$\underline{\text{O}}.\ \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$　$\underline{\text{P}}.\ \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$

$\underline{\text{Q}}.\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$　$\underline{\text{R}}.\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha}e^{-\beta x}$　$\underline{\text{S}}.\ \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$　$\underline{\text{T}}.\ \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha}e^{-\beta x}$

$\underline{\text{U}}.\ \frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$　$\underline{\text{V}}.\ \frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}$　$\underline{\text{W}}.\ \frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}$　$\underline{\text{X}}.\ \frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$

$\underline{\text{Y}}$. その他

選択肢２：標本空間

$\underline{1}.\ \{0,1\}$　$\underline{2}.\ \{1,2\}$　$\underline{3}.\ \{0,1,2\}$　$\underline{4}.\ \{0,1,\ldots,k\}$　$\underline{5}.\ \{1,2,\ldots,k\}$　$\underline{6}.\ \{0,1,\ldots,n\}$　$\underline{7}.\ \{1,2,\ldots,n\}$

$\underline{8}.\ \{0,1,\ldots,n,\ldots,\}$　$\underline{9}.\ (0,\infty)$　$\underline{10}.\ [0,\infty)$　$\underline{11}.\ (-\infty,\infty)$　$\underline{12}.\ [-\infty,\infty]$　$\underline{13}$. その他

2. 期待値について、正しい式に○を、誤っている式に×を回答せよ。(回答は 2-1 ○ 2-2 ○ など答えのみでよい。縦書きでも横書きでもよい) なお、この問題に限り、タイプミスが無いことは確認済みであるので、タイプミスかどうかの質問はしないこと。 (配点 20 点)

2-1　確率変数 X と定数 a、b に対して $E[aX+b]=aE[X]+b$

2-2　確率変数 X と定数 a、b に対して $E\left[(aX+b)^2\right]=a^2E[X]^2+b^2$

2-3　確率変数 X と定数 a に対して $V[aX]=aV[X]$

2-4　確率変数 X と定数 a に対して $V[aX]=a^2V[X]$

2-5　互いに独立な２つの確率変数 X,Y に対して $E[XY]=E[X]E[Y]$

2-6　互いに独立な２つの確率変数 X,Y に対して $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$

2-7　任意の確率変数について $E[X-E[X]]=0$

2-8　任意の確率変数について $V[X/V[X]]=1$

2-9　互いに独立な２つの確率変数 X,Y に対して、$X+Y$ のモーメント母関数は $M_X(s)M_Y(t)$

2-10　互いに独立な２つの確率変数 X,Y に対して、$X+Y$ のモーメント母関数は $M_X(s)+M_Y(t)$

3. 以下の同時確率分布表につき、問いに答えよ。 (配点 20 点) 問いの中で「という情報を得た」とは「という条件を与えられた」と読み替えてよい。また後半は、得失を確率変数の値と考える、あるいは得失は A と B と C の関数と考える、とよい。

表 1 確率変数 A, B, C についての同時確率表と得失

A	B	C	確率	得失
0	0	0	0.05	5
0	0	1	0.10	10
0	1	0	0.10	0
0	1	1	0.15	10
1	0	0	0.20	-5
1	0	1	0.15	10
1	1	0	0.10	-15
1	1	1	0.15	20

右表は、$A = 0, B = 0, C = 0$ となる確率は 0.05 でこのとき 5 の得をする、$A = 1, B - 0, C = 0$ となる確率は 0.20 でこのとき -5 の損をする、などと読む。

3-1 $A = 1$ という情報を得たときの、B と C の組み合わせ、についての条件付き確率表を作成せよ。

3-2 $B = 1$ という情報を得たときの、C のみ、についての条件付き確率表を作成せよ。

3-3 $A = 1$ という情報のみを得たときの、得失 の条件付き期待値を求めよ。(B および C については何も得られていない)

3-4 $A = 1$、$A = 0$、$B = 1$、$B = 0$、$C = 1$、$C = 0$ のうち、どの条件を与えられたときが、一番、得失の条件付き期待値が大きくなるか、そのときの条件付き期待値と共に答えよ。

4. 離散確率分布についての計算：二項分布の確率関数は

$$Pr[X = k] \quad = \quad p(k; n, p) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \tag{1}$$

である。この確率分布について、以下の問いに答えなさい。なお解答用紙には、答えのみでなく、計算過程が分かるように記すこと。

4-1 期待値 $E[X]$ を求めよ。

4-2 分散 $V[X]$ $(= E\left[(X - E[X])^2\right])$ を求めよ。

4-3 モーメント母関数 $M_X(t) = E\left[e^{Xt}\right]$ を求めよ。(ベルヌーイ試行のモーメント母関数の導出を経由してもよい)

4-4 ベルヌーイ試行と二項分布の関係を、モーメント母関数を用いて説明せよ。

5. 連続確率分布についての計算：ガンマ分布の確率密度関数は

$$\frac{d}{dx} Pr[X \leq x] \quad = \quad f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \beta^{-\alpha} \exp(-x/\beta) \tag{2}$$

である。この確率分布について、以下の問いに答えなさい。なお解答用紙には、答えのみでなく、計算過程が分かるように記すこと。

5-1 期待値 $E[X]$ を求めよ。

5-2 分散 $V[X]$ $(= E\left[(X - E[X])^2\right])$ を求めよ。

5-3 モーメント母関数 $M_X(t) = E\left[e^{Xt}\right]$ を求めよ。

5-4 指数分布とガンマ分布の関係を、モーメント母関数を用いて説明せよ。

10 juillet 2012
PROB #10-b

確率論 (*Probability Theory*) 第 **10** 週 中間試験 (追試)

w.yamamoto

1. ベルヌーイ試行は、標本空間が $\{0,\}$ で、$Pr[X=1]=p$ としたときに、

$$p(k) \quad = \quad p^k(1-p)^{1-k}$$

なる確率関数を持つ確率事象である。独立にベルヌーイ試行を繰り返すときの各回の事象を表す確率変数を X_1, $X_2, \ldots$ と置く。これにつき、下記の問いに答えよ。

1-1 1 回のベルヌーイ試行のモーメント母関数を求めよ。

1-2 ベルヌーイ試行を n 回繰り返すとき、n 回中の結果が 1 となる回数 X の確率分布の確率関数を導け。

1-3 ベルヌーイ試行を、1 を累計で k 回観測するまで継続する時、総試行回数 Y が従う確率分布の確率関数を導け。

2. パラメータ $\lambda > 0$ をもつ指数分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}$$

で与えられる。このとき、以下の問いに答えよ。

2-1 累積分布関数 $F(t) = Pr[X \leq t]$ を求めよ。

2-2 条件付き確率 $Pr[X \leq t | X > a]$ を求めよ。ただし $t > a > 0$ とする。

2-3 X の期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を求めよ。

次に、上で与えられた確率変数 X の関数 $\phi(X)$ を、$k = 0, 1, 2, \ldots$ について $k < X \leq k+1$ のときに

$$\phi(X) \quad = \quad k$$

と定義する。例えば X が $2 < X \leq 3$ を満たすとき、$\phi(X) = 2$ となる。これの関数を用いて、確率変数 Y を定義する。

$$Y \quad = \quad \phi(X)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

2-4 $p(k) = Pr[Y = k]$ を λ を用いた式で表せ。

2-5 Y の期待値を計算せよ。ただし、$|r| < 1$ ならば

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

が成り立つことは使ってよい。

3. ある市での年間平均での降水確率 (無作為に抽出した一日の降水確率とも) は 0.25 である。その市を含む地方の天気予報は、予報が雨や雪など降水があるとなったときに実際に降水がある確率は 60%、降水以外の予報が当たる確率は 80% である。この市の予報と天気について、次の問いに答えよ。

3-1 予報を X、実際の天気を Y とする。表 1 を埋めなさい。

表 1 X と Y の同時確率表

	Y:降水あり	Y:降水なし
X:降水あり		
X:降水なし		

3-2 予報が当たる確率を求めよ。

3-3 予報が当たった日に降水がある確率を求めよ。

4. 青・赤・黄の 3 色の袋がそれぞれ 2, 2, 1 個ずつある。3 色の袋の中にはそれぞれ白球と黒球が、表に書かれた個数入っている。いま、無作為に選ばれた袋から無作為に球 1 個を取り出したところ、白球であったという結果を知らされた。この白球が黄色の袋から取り出されたものである確率を、求めよ。

表 3 袋の中身

	青袋	赤袋	黄袋
白球	2 個	1 個	4 個
黒球	3 個	4 個	1 個

5. あるガソリンスタンドの週の売上量 X (単位 100k リットル) は、

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \tag{3}$$

との確率密度関数を持つ確率分布に従っている。

5-1 $0 \leq x \leq 1$ の範囲での累積分布関数を求めよ。

5-2 この確率分布に従って販売できるとして、週あたりの平均の売上量を求めよ。

5-3 このガソリンスタンドは、毎週 1 回ガソリンの補給を受けて、タンクを満杯にする。このタンクの容量が 75 リットルのとき、タンクを満杯にして一週間の営業を始めても、ガソリンが売り切れてしまう確率はいくらか。