

2 中間試験問題(4限向け)

解答用紙は最初から2枚を受け取り、名前・学籍番号を記せ。大問の解答順序は自由でよい。答案提出時には、使わなかった解答用紙も提出してよい。

1. 3つの確率変数 X, Y, Z につき、条件付き確率表が2つ、周辺確率表が1つある。

	$X = 1$	$X = 2$
確率	8/10	2/10

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	1/10	3/10	6/10
$X = 2$	6/10	3/10	1/10

	$Z = 1$	$Z = 2$	$Z = 3$
$Y = 1$	6/10	3/10	1/10
$Y = 2$	2/10	6/10	2/10
$Y = 3$	1/10	3/10	6/10

- Z の周辺確率表を作成せよ。
 - $Z = 1$ のときの、 X の条件付き確率表を与えよ。
 - $Z = 1$ のときの、 Y の条件付き期待値を求めよ。
2. 表1と表2に、互いに独立は2つの確率変数 X 、 Y の確率表と確率変数の関数 $g(\cdot)$ の値の表を与えてある。

確率変数 X	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
確率 p_k	1/16	2/16	4/16	9/16
$g(X) = -\log p_k$	$4 \log 2$	$3 \log 2$	$2 \log 2$	$4 \log 2 - 2 \log 3$

確率変数 Y	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$
確率 q_k	1/4	1/4	1/4	1/4
$g(Y) = -\log q_k$	$2 \log 2$	$2 \log 2$	$2 \log 2$	$2 \log 2$

これらにつき、以下の問いに答えよ。ただし $\log 2 = 0.7 = 3/10$ 、 $\log 3 = 1.1 = 11/10$ としてよい。

- $E[g(X)]$ を求めよ。
 - $E[g(Y)]$ を求めよ。
 - $E[g(X)]$ と $E[g(Y)]$ のどちらが大きいか、上の計算結果に基づいて、回答せよ。
3. 次の関係式を、密度関数 $f(x)$ をもつ確率分布 F に関する確率変数の関数 $g(X)$ の期待値の定義

$$E_X[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

から導け。なおこの問いでは原点モーメントと中心モーメントをそれぞれ

$$m_k = E[X^k]$$

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k]$$

と記す。また確率分布の平均を μ 、分散を σ^2 と記すと、 $m_1 = \mu$ 、 $\mu_2 = \sigma^2$ となるが、 m_1 は必ず μ と、 μ_2 は必ず σ^2 とそれぞれ記すこと。

- $\sigma^2 = m_2 - \mu^2$
 - $\text{Var}[aX + b] = a^2 \sigma^2$
 - $E[(X - \mu)^3] = m_3 - 3m_2\mu + 2\mu^3$
4. モーメント母関数が

$$M_X(t) = (e^t - 1)^2 / t^2$$

となる確率分布 F につき、以下の問いに答えよ。

1. この確率分布の平均を求めよ。
 2. この確率分布の分散を求めよ。
5. 確率変数 X の期待値 $E[X]$ を μ 、分散 $Var[X]$ を σ^2 と書く。 X が非負の確率変数のときのみ成立するマルコフの不等式

$$Pr[X \geq a] \leq \frac{\mu}{a}$$

と、 X が非負でなくとも成立するチェビシェフの不等式

$$Pr[|X - \mu| \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

に関する、以下の問いに答えよ。なお X は連続分布と仮定しても、離散分布と仮定してもよく、証明はどちらか一方で示せばよい。

1. マルコフの不等式を証明せよ。
 2. マルコフの不等式を所与として、チェビシェフの不等式を証明せよ。
6. 確率ベクトル (X, Y) の同時確率密度関数として、次のものを考える。

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xy + \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{4} & (x,y) \in D \text{ のとき} \\ 0 & (x,y) \notin D \text{ のとき} \end{cases}$$

ここで、 $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ である。このとき、次の問いに答えよ。

1. X の周辺分布の密度関数 f_X を求めよ。
2. Y の周辺分布の密度関数 f_Y を求めよ。
3. X と Y が互いに独立か調べよ。
4. $Pr[X+Y < 1]$ を求めよ。

3 中間試験問題(5限向け)

解答用紙は最初から2枚を受け取り、名前・学籍番号を記せ。大問の解答順序は自由でよい。答案提出時には、使わなかった解答用紙も提出してよい。

1. 3つの確率変数 X, Y, Z につき、条件付き確率表が2つ、周辺確率表が1つある。

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
確率	8/10	1/10	1/10

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	6/10	3/10	1/10
$X = 2$	0/10	6/10	4/10
$X = 3$	0/10	0/10	10/10

	$Z = 1$	$Z = 2$	$Z = 3$
$Y = 1$	7/10	2/10	1/10
$Y = 2$	1/10	7/10	2/10
$Y = 3$	1/10	2/10	7/10

1. Z の周辺確率表を作成せよ。
2. $Z = 1$ のときの、 X の条件付き確率表を与えよ。
3. $Z = 1$ のときの、 Y の条件付き期待値を求めよ。

2. 表1と表2に、互いに独立な2つの確率変数 X, Y の確率表と確率変数の関数 $g(\cdot)$ の値の表を与えてある。

確率変数 X	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
確率 p_k	3/16	4/16	4/16	5/16
$g(X) = -\log p_k$	$4 \log 2 - \log 3$	$2 \log 2$	$2 \log 2$	$4 \log 2 - \log 5$

確率変数 Y	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$
確率 q_k	1/4	1/4	1/4	1/4
$g(Y) = -\log q_k$	$2 \log 2$	$2 \log 2$	$2 \log 2$	$2 \log 2$

これらにつき、以下の問いに答えよ。ただし $\log 2 = 0.7 = 3/10$ 、 $\log 3 = 1.1 = 11/10$ 、 $\log 5 = 1.6 = 16/10 = 8/5$ としてよい。

1. $E[g(X)]$ を求めよ。
2. $E[g(Y)]$ を求めよ。
3. $E[g(X)]$ と $E[g(Y)]$ のどちらが大きいか、上の計算結果に基づいて、回答せよ。

3. 次の関係式を、密度関数 $p(x)$ をもつ確率分布 F に関する確率変数の関数 $g(X)$ の期待値の定義

$$E_X[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)p(x)$$

から導け。なおこの問いでは原点モーメントと中心モーメントをそれぞれ

$$m_k = E[X^k]$$

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k]$$

と記す。また確率分布の平均を μ 、分散を σ^2 と記すと、 $m_1 = \mu$ 、 $\mu_2 = \sigma^2$ となるが、 m_1 は必ず μ と、 μ_2 は必ず σ^2 とそれぞれ記すこと。

1. $\sigma^2 = m_2 - \mu^2$

$$2. \text{Var}[aX + b] = a^2\sigma^2$$

$$3. E[(X - \mu)^3] = m_3 - 3m_2\mu + 2\mu^3$$

4. モーメント母関数が

$$M_X(t) = \frac{e^{2t} - e^t}{t}$$

となる確率分布 F につき、以下の問いに答えよ。

1. この確率分布の平均を求めよ。
2. この確率分布の分散を求めよ。

5. 確率変数 X の期待値 $E[X]$ を μ 、分散 $\text{Var}[X]$ を σ^2 と書く。 X が非負の確率変数のときのみ成立するマルコフの不等式

$$\Pr[X \geq a] \leq \frac{\mu}{a}$$

あるいは、 X が非負でなくとも成立するチェビシェフの不等式

$$\Pr[|X - \mu| \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

を用いる、以下の問いに答えよ。

1. ある企業の社員の一ヶ月あたりの残業時間の平均が 20 時間で、残業の発生確率や発生量に個人差はないものとしたとき、この企業のある社員の残業時間が 100 時間を超える確率の上限を求めよ。
2. ある企業の社員の一ヶ月あたりの残業時間の平均が 20 時間で、同じく一ヶ月あたりの残業時間の標準偏差は 10 時間とする。このとき、この企業のある社員の残業時間が 100 時間を超える確率の上限を求めよ。

6. 確率ベクトル (X, Y) の同時確率密度関数として、次のものを考える。

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xy + \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{4} & (x,y) \in D \text{ のとき} \\ 0 & (x,y) \notin D \text{ のとき} \end{cases}$$

ここで、 $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ である。このとき、次の問いに答えよ。

1. X の周辺分布の密度関数 f_X を求めよ。
2. Y の周辺分布の密度関数 f_Y を求めよ。
3. X と Y が互いに独立か調べよ。
4. $\Pr[X + Y < 1]$ を求めよ。

4 今回の中間試験について

回答完成後、暇があったら、読んでみてください。今年度の試験の出題意図(次年度以降も同じとは限りません)を記します。

確率論の試験問題は、計算の仕方を練習して、慣れてくれていることを前提に、出題します。そのため、通常の科目より問題数が多いかもしれません。この科目では、考え方や計算の仕方を身につけてくれることを重視しますので、少々の計算ミスでしたら、減点するものの、それほど深刻な減点にはしません。ただし計算ミスか、誤回答かの判断は、採点者に一任されるものとしますので、計算ミスかそうでないかは分かりやすく書くとよいです。

中間試験は、前半(確率論の基礎)の部分の理解の確認を主眼におきました。具体的には、確率についての基本的な計算と確率分布についての基本的な計算を、正しく修得しているか、を確認します。今回は秀レベルの問題を入れるのは断念しました。期末試験では、前半の理解を踏まえた問題、後半のみの問題、さらに秀レベルを試す問題も入れます。

- 基礎レベル：これができないと、確率論の単位はあげられません
 1. 確率分布についての基礎知識としての、確率分布と標本空間(定義域)と各種関数の対応(20点)
 3. 確率表に基づく確率計算の問題: 同時分布や条件付き分布についての計算ができることを確認させてください(20点)

確率分布間の関係(1): 講義で紹介した確率分布が互いにどのような関係にあるか、理解しているかを確認させてください(今回は出題せず)
 2. 期待値計算の問題: 任意の確率分布について、必要な積分や総和を書き下せたら、種々の計算ができること、を確認させてください(20点)
- 確認レベル：これができないと、褒めてはあげられませんが、ぜんぶできても秀とは限りません
 4. 確率分布についての計算の問題：講義で紹介した離散確率分布からランダムに選んで、その分布に固有の計算に習熟していること、を確認させてください(20点) 確率分布の候補はベルヌーイ試行、二項分布、幾何分布、負の二項分布、ポアソン分布。確率関数は明示すると約束済み。尋ねるのは期待値、分散、モーメント母関数、モーメント母関数のマクローリン展開、独立な和の分布、など。(20点)
 5. 確率分布についての計算の問題：講義で紹介した連続確率分布からランダムに選んで、その分布に固有の計算に習熟していること、を確認させてください(20点) 確率分布の候補は指数分布、ガンマ分布、ベータ分布。確率密度関数は明示すると約束済み。尋ねるのは期待値、分散、モーメント母関数、モーメント母関数のマクローリン展開、独立な和の分布、など。(20点)

確率分布間の関係(2): 講義で紹介した確率分布が互いにどのような関係にあるか、理解しているかを確認させてください(今回は出題せず)
- 少し高いレベル：今回は、これができたら、凄いなあ、と思います。

確率分布の特徴(今回は出題せず)

応用問題(今回は出題せず)

全部完答(量が多いから、ぜんぶできたら表彰ものです)

モーメント母関数シリーズは、上も含めて

$$M_X(t) = (e^t + e^{2t} + \dots + e^{nt})/n \tag{1}$$

$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n \tag{2}$$

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}, t < -\log(1-p) \tag{3}$$

$$M_X(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\} \tag{4}$$

$$M_X(t) = \frac{p^\alpha}{(1 - (1-p)^\alpha)^t}, t < -\log(1-p) \tag{5}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t} \tag{6}$$

$$M_X(t) = \frac{(e^t - 1)^2}{t^2} \tag{7}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{1 - \alpha t} \tag{8}$$

$$M_X(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2 / 2) \tag{9}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{(1 - 2t)^{k/2}} \tag{10}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha} \tag{11}$$

などがある。

8. モーメント母関数が

$$M_X(t) = \frac{e^t + e^{2t} + e^{3t}}{3}$$

となる確率分布 F につき、以下の問いに答えよ。

1. この確率分布の平均を求めよ。
2. この確率分布の分散を求めよ。

1. 次の各確率分布につき、選択肢 1 から該当する確率関数もしくは確率密度関数を、選択肢 2 から標本空間を選び、解答用紙に記せ。相応しいものが無ければ、その他を選び、相応しいものを記せ。(例えば 1-1 A i. などと回答せよ。横並びでも縦並びでも構わない。) (配点 20 点)

- 1-1 ベルヌーイ試行 1-2 二項分布 1-3 幾何分布 1-4 負の二項分布
 1-5 ポアソン分布 1-6 指数分布 1-7 ガンマ分布 1-8 ベータ分布

選択肢 1 : 確率関数/確率密度関数

- A. $p(1-p)^k$ B. $p^2(1-p)^k$ C. $p^k(1-p)^{1-k}$ D. $p^k(1-p)^{n-k}$
 E. $nC_k p^k (1-p)^{n-k-1}$ F. $nC_k p^k (1-p)^{n-k}$ G. $k+r-1C_{r-1} p^{r-1} (1-p)^k$ H. $k+rC_r p^{r-1} (1-p)^k$
 I. $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ J. $\frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda}$ K. $\frac{\lambda^{-k}}{k!} e^{-\lambda}$ L. $\frac{\lambda^{-k}}{k!} e^{\lambda}$ M. $\lambda e^{-\lambda x}$ N. $\lambda e^{\lambda x}$ O. $\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$ P. $\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$
 Q. $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ R. $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\beta x}$ S. $\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ T. $\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\beta x}$
 U. $\frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$ V. $\frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^\alpha (1-x)^{\beta-1}$ W. $\frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^\beta$ X. $\frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^\alpha (1-x)^\beta$
 Y. その他

選択肢 2 : 標本空間

1. $\{0, 1\}$ 2. $\{1, 2\}$ 3. $\{0, 1, 2\}$ 4. $\{0, 1, \dots, k\}$ 5. $\{1, 2, \dots, k\}$ 6. $\{0, 1, \dots, n\}$ 7. $\{1, 2, \dots, n\}$
 8. $\{0, 1, \dots, n, \dots\}$ 9. $(0, \infty)$ 10. $[0, \infty)$ 11. $(-\infty, \infty)$ 12. $[-\infty, \infty]$ 13. その他

2. 期待値について、正しい式に○を、誤っている式に×を回答せよ。(回答は 2-1 ○ 2-2 ○ など答えのみでよい。縦書きでも横書きでもよい) なお、この問題に限り、タイプミスが無いことは確認済みであるので、タイプミスかどうかの質問はしないこと。(配点 20 点)

2-1 確率変数 X と定数 a, b に対して $E[aX + b] = aE[X] + b$

2-2 確率変数 X と定数 a, b に対して $E[(aX + b)] = a^2E[X]^2 + b^2$

2-3 確率変数 X と定数 a に対して $V[aX] = aV[X]$

2-4 確率変数 X と定数 a に対して $V[aX] = a^2V[X]$

2-5 互いに独立な 2 つの確率変数 X, Y に対して $E[XY] = E[X]E[Y]$

2-6 互いに独立な 2 つの確率変数 X, Y に対して $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

2-7 任意の確率変数について $E[X - E[X]] = 0$

2-8 任意の確率変数について $V[X/V[X]] = 1$

2-9 互いに独立な 2 つの確率変数 X, Y に対して、 $X + Y$ のモーメント母関数は $M_X(s)M_Y(t)$

2-10 互いに独立な 2 つの確率変数 X, Y に対して、 $X + Y$ のモーメント母関数は $M_X(s) + M_Y(t)$

3. 以下の同時確率分布表につき、問いに答えよ。(配点 20 点) 問いの中で「という情報を得た」とは「という条件を与えられた」と読み替えてよい。また後半は、得失を確率変数の値と考える、あるいは得失は A と B と C の関数と考える、とよい。

表 1 確率変数 A, B, C についての同時確率表と得失

A	B	C	確率	得失
0	0	0	0.05	5
0	0	1	0.10	10
0	1	0	0.10	0
0	1	1	0.15	10
1	0	0	0.20	-5
1	0	1	0.15	10
1	1	0	0.10	-15
1	1	1	0.15	20

右表は、 $A = 0, B = 0, C = 0$ となる確率は 0.05 でこのとき 5 の得をする、 $A = 1, B = 0, C = 0$ となる確率は 0.20 でこのとき -5 の損をする、などと読む。

- 3-1 $A = 1$ という情報を得たときの、 B と C の組み合わせ、についての条件付き確率表を作成せよ。
- 3-2 $B = 1$ という情報を得たときの、 C のみ、についての条件付き確率表を作成せよ。
- 3-3 $A = 1$ という情報のみを得たときの、得失の条件付き期待値を求めよ。(B および C については何も得られていない)
- 3-4 $A = 1, A = 0, B = 1, B = 0, C = 1, C = 0$ のうち、どの条件を与えられたときが、一番、得失の条件付き期待値が大きくなるか、そのときの条件付き期待値と共に答えよ。

4. 離散確率分布についての計算：二項分布の確率関数は

$$Pr[X = k] = p(k; n, p) = {}_n C_k p^k (1 - p)^{n-k} \quad (12)$$

である。この確率分布について、以下の問いに答えなさい。なお解答用紙には、答えのみでなく、計算過程が分かるように記すこと。

- 4-1 期待値 $E[X]$ を求めよ。
- 4-2 分散 $V[X] (= E[(X - E[X])^2])$ を求めよ。
- 4-3 モーメント母関数 $M_X(t) = E[e^{Xt}]$ を求めよ。(ベルヌーイ試行のモーメント母関数の導出を經由してもよい)
- 4-4 ベルヌーイ試行と二項分布の関係を、モーメント母関数を用いて説明せよ。

5. 連続確率分布についての計算：ガンマ分布の確率密度関数は

$$\frac{d}{dx} Pr[X \leq x] = f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \beta^{-\alpha} \exp(-x/\beta) \quad (13)$$

である。この確率分布について、以下の問いに答えなさい。なお解答用紙には、答えのみでなく、計算過程が分かるように記すこと。

- 5-1 期待値 $E[X]$ を求めよ。
- 5-2 分散 $V[X] (= E[(X - E[X])^2])$ を求めよ。
- 5-3 モーメント母関数 $M_X(t) = E[e^{Xt}]$ を求めよ。
- 5-4 指数分布とガンマ分布の関係を、モーメント母関数を用いて説明せよ。