

due	19 juin 2014
cur	19 juin 2014
ver	1
rev	0

## 1 ポアソン分布

ポアソン分布は、繰り返し発生する事象が、与えられた時間内に発生する回数の確率分布である。この分布の確率関数は

$$Pr[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \quad (1)$$

で与えられる。ポアソン分布を用いる際には、上の式が

1. 独立性：事象の発生は互いに独立かつ、過去の発生履歴とは無関係
2. 定常性：事象の発生確率は時点 (時間帯) によって変化しない
3. 希少性：微小時間に 2 回以上の起こる確率は無視できる

の 3 つの仮定に基づいて導出されていることを、忘れてはならない。

ポアソン分布に関する確率や期待値の計算には、 $\exp(\lambda)$  のマクローリン展開 ( $\lambda = 0$  の回りでテイラー展開)

$$\exp(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (2)$$

と、全確率に関する次の関係式

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} Pr[X = k] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

が用いられる。

$X$  の期待値は

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^l}{(l)!}, \quad (l = k-1) \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \end{aligned} \quad (4)$$

と先の関係式を覚えていれば、用いるだけである。一箇所、総和をとる変数を「ずらす」のは二項分布に関する計算に似ている。

$X$  の分散も、二項分布と同様である。定義

$$V[X] = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (5)$$

から分散を直接計算するのでも、2乗の平均  $E[X^2] = m_2$  と平均  $E[X] = m_1$  の2乗  $m_1^2$  を求めるのでもなく、少し巧妙に、

$$V[X] = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 \quad (6)$$

という関係式を用いる。 $k^2$  をかけて総和を求めるより、 $k(k-1)$  をかけた総和を求める方が、階乗 ( $k! = k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1$ ) に馴染みやすく、計算が簡単になる。

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^n \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{l=0}^n \frac{\lambda^l}{l!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 \end{aligned} \quad (7)$$

より、

$$V[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \quad (8)$$

を得る。

モーメント母関数は定義通りに計算するが、

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[\exp(Xt)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^t)^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)} \end{aligned} \quad (9)$$

と途中で、指数関数の原点回りのテイラー展開を思い出して、下の表現に戻すことで、導出できる。  
たまた

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \quad (10)$$

という極限も知っている必要があるかもしれない。

## 2 マクローリン展開とテイラー展開

無限回微分可能な関数  $g(x)$  の  $k$  階の導関数を  $g^{(k)}$  とおく。まず、テイラーの公式

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (11)$$

を既知とする。  $R_n$  はこの式の等号が成り立つように定められる剰余項である。ロルの定理から  $x$  に依存して決まり、区間  $(a, b)$  の値を取る関数  $c(x)$  を用いて

$$R_n(x) = \frac{g^{(n)}(c(x))}{n!} (x-a)^n \quad (12)$$

と表せる。

テイラーの公式で  $n \rightarrow \infty$  とせず、有限の  $n$  のまま、 $x = a$  の近傍で

$$g(x) \simeq \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a) \quad (13)$$

とすると、 $g(x)$  の  $x = a$  の近傍での多項式近似が得られる。ただし、この近似が良い精度を持つためには、剰余項が

$$R_n(x) = o((x-a)^{n-1}) \quad (14)$$

を満たさなければならない。

$g(x)$  のマクローリン展開は、テイラーの公式で  $a=0$  と置き、さらに  $n \rightarrow \infty$  の極限

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{6}x^3 + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

として与えられる。マクローリン展開の展開の中心を  $x=0$  ではなく  $x=a$  とすると、テイラー展開と言われる。

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= g(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{6}(x-a)^3 + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

テイラー展開やマクローリン展開は、テイラーの公式の極限であり、これら存在する条件は、テイラーの公式の剰余項が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (17)$$

を満たすことである。

## 参考文献

- [1] 久保木久孝 (2007) 「確率・統計解析の基礎」, 朝倉書店. (教科書)
- [2] 宮川雅巳 (1998) 「統計技法」工系数学講座 14, 共立出版. (教科書)
- [3] 永田靖 (2005) 「統計学のための数学入門 30 講」科学のこぼれとしての数学, 朝倉書店. (講義・教科書などで、計算が追えないところが見つかった時、それを尋ねるつもりで開くと助けてくれる本)
- [4] 藤田岳彦 (2010) 「弱点克服 大学生の確率・統計」東京図書. (講義・教科書などで、計算を追えないところが見つかった時、それを尋ねるつもりで開くと助けてくれる本)
- [5] 東京大学教養学部統計学教室・編 (1991) 「統計学入門」基礎統計学 I, 東京大学出版会. (教科書)
- [6] 薩摩純吉 (1989) 「確率・統計」理工系の数学入門コース 7, 岩波書店. (教科書)