Hand out

due	19 juin 2014
cur	19 juin 2014
ver	1
rev	0

確率論 (*Probability*) 第 11 週

w.yamamoto

1　ポアソン分布

ポアソン分布は、繰り返し発生する事象が、与えられた時間内に発生する回数の確率分布である。この分布の確率関数は

$$Pr[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \tag{1}$$

で与えられる。ポアソン分布を用いる際には、上の式が

1. 独立性：事象の発生は互いに独立かつ、過去の発生履歴とは無関係
2. 定常性：事象の発生確率は時点 (時間帯) によって変化しない
3. 希少性：微小時間に 2 回以上の起こる確率は無視できる

の 3 つの仮定に基づいて導出されていることを、忘れてはならない。

ポアソン分布に関する確率や期待値の計算には、$\exp(\lambda)$ のマクローリン展開 ($\lambda = 0$ の回りでのテイラー展開)

$$\exp(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \tag{2}$$

と、全確率に関する次の関係式

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} Pr[X = k] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1\end{aligned} \tag{3}$$

が用いられる。

X の期待値は

$$\begin{aligned}E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} kp(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^l}{(l)!}, \quad (l = k-1) \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda\end{aligned} \tag{4}$$

と先の関係式を覚えていれば、用いるだけである。一箇所、総和をとる変数を「ずらす」のは二項分布に関する計算に似ている。

X の分散も、二項分布と同様である。定義

$$V[X]=E\left[(X-\mu)^2\right]=E\left[X^2\right]-(E[X])^2 \tag{5}$$

から分散を直接計算するのでも、2 乗の平均 $E\left[X^2\right]=m_2$ と平均 $E[X]=m_1$ の 2 乗 ${m_1}^2$ を求めるのでもなく、少し巧妙に、

$$V[X]=E[X(X-1)]+E[X]-(E[X])^2 \tag{6}$$

という関係式を用いる。k^2 をかけて総和を求めるより、$k(k-1)$ をかけた総和を求める方が、階乗 $(k!=k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1)$ に馴染みやすく、計算が簡単になる。

$$\begin{aligned}E[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,p(k)=\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\ &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}e^{-\lambda}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{n}\frac{\lambda^{l}}{(l)!}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda^2 \end{aligned} \tag{7}$$

より、

$$V[X]=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda \tag{8}$$

を得る。

モーメント母関数は定義通りに計算するが、

$$\begin{aligned}M_X(t) &= E[\exp(Xt)]=\sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^t\right)^k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda\left(e^t-1\right)}\end{aligned} \tag{9}$$

と途中で、指数関数の原点回りのテイラー展開を思い出して、下の表現に戻すことで、導出できる。

たまに

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \tag{10}$$

という極限も知っている必要があるかもしれない。

参考文献

[1] 久保木久孝 (2007)「確率・統計解析の基礎」, 朝倉書店. (教科書)

[2] 宮川雅巳 (1998)「統計技法」工系数学講座 14, 共立出版. (教科書)

[3] 永田靖 (2005)「統計学のための数学入門 30 講」 科学のことばとしての数学, 朝倉書店. (講義・教科書などで、計算が追えないところが見つかった時、それを尋ねるつもりで開くと助けてくれる本)

[4] 藤田岳彦 (2010) 「弱点克服 大学生の確率・統計」 東京図書. (講義・教科書などで、計算を追えないところが見つかった時、それを尋ねるつもりで開くと助けてくれる本)

[5] 東京大学教養学部統計学教室・編 (1991) 「統計学入門」基礎統計学 I, 東京大学出版会. (教科書)

[6] 薩摩純吉 (1989) 「確率・統計」理工系の数学入門コース 7, 岩波書店. (教科書)