18 juillet 2013
PROB #13

確率論 (*Probability Theory*) 第 13 週 正規分布

w.yamamoto

1　確率変数の変換 (1 次元)

確率変数 X が確率密度関数 $f_x(x)$ を持つ確率分布に従うとする。

1.1　位置変換

確率分布の平均を μ だけ横にずらすことを、位置変換と呼ぶことがある。確率変数 Y の従う確率分布が、確率変数 X の従う確率分布から μ だけずれているとは、

$$Y \quad \sim \quad X+\mu \tag{1}$$

という関係にあることを言う。連続確率変数の場合には、X と Y の標本空間は共通でなければならない。このとき Y の密度関数は

$$y \quad = \quad x+\mu \tag{2}$$

かつ $x \in \mathcal{X} \Rightarrow y \in \mathcal{Y}$ から、

$$f_y(y) = f_x(x-\mu) \tag{3}$$

となる。

これは実は、確率変数の関数の期待値を計算する際に、$y = x + \mu$ と変数変換をすると、$dx = dy$ と積分領域が変わらないことから

$$\int_X g(y) f_y(y)\,dy \quad = \quad \int_X g(y) f_x(y-\mu)\,dy \tag{4}$$

と右辺で積分ができることと同等である。

このことを以て、確率分布の μ による位置変換後の確率変数 Y の確率密度関数は $f(y-\mu)$ である、という。

1.2　尺度変換

確率変数の原点からの距離 (あるいは値) を $1/\sigma$ 倍することを、尺度変換と呼ぶことがある。σ 倍することも、同じく尺度変換という。[1]

確率論では、

1. 期待値が μ の非負の確率変数 X について、期待値を 1 にする変換: $Y \sim X/\mu$
2. 期待値が 0 で分散が σ^2 の確率変数 X について、分散を 1 にする変換: $Y \sim X/\sigma$

という方向の尺度変換と

1. 非負で期待値が 1 の確率変数 Y について、期待値を μ にする変換: $XsimY\mu$
2. 期待値が 0 で分散が 1 の確率変数 Y について、分散を σ^2 にする変換: $X \sim Y\sigma$

[1] たとえば m 単位を km 単位に変換するときに 1/1000 倍することと、km 単位を m 単位に変換するときに 1000 倍すること、どちらく単位の変換と言われるのと同じこと。

という上とは逆方向の尺度変換をよく見かける。いずれにせよ変換のヤコビアンは

$$dx = \mu dy \quad dy = \frac{1}{\mu}dx$$

あるいは

$$dx = \frac{1}{\sigma}dy \quad dy = \sigma dx$$

となる。

例えば指数分布の密度関数には

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{\mu}e^{-x/\mu} = \frac{\lambda^{-\lambda x}}{e} \tag{5}$$

のふたつの表現がある。平均が 1 の指数分布の密度関数が

$$f_1(z) \quad = \quad e^{-z} \tag{6}$$

と見比べると、式 (5) の真ん中の表現は Z を μ 倍すると期待値も μ になるという意味であり、右側の表現は Z を $1/\lambda$ 倍すると平均が $1/\lambda$ の指数分布になるという意味である。参考までに両者が同じ確率分布であるためには、$\mu = 1/\lambda$ が成り立たなければならない。

確率変数 Y の尺度が、確率変数 X の尺度の σ 倍であるとは、

$$Y/\sigma \sim X \quad \text{or} \quad Y \sim X\sigma \tag{7}$$

という関係にあることを言う。このとき、連続確率変数の場合には、X と Y の標本空間は共通であるなら、Y の密度関数は

$$y \quad = \quad x\sigma \tag{8}$$

かつ $x \in \mathcal{X} \Rightarrow y \in \mathcal{Y}$ から、

$$f_y(y) = \frac{1}{\sigma}f_x\left(\frac{x}{\sigma}\right) \tag{9}$$

となる。

これは実は、確率変数の関数の期待値を計算する際に、$y = x\sigma$ と変数変換をすると、$dx = dy/\sigma$ であり、ここでも積分領域が変わらないことから

$$\int_X g(y)\, f_y(y)\, dy \quad = \quad \int_X g(y)\, \frac{1}{\sigma}f_x\left(\frac{y}{\sigma}\right)dy \tag{10}$$

と右辺で積分ができることと同等である。

このことを以て、確率分布の μ による位置変換後の確率変数 Y の確率密度関数は $f_x(y/\sigma)$ である、という。

1.3 一般の変換

一般の変換の場合には、確率変数 X の密度関数を $f_x(x)$ とすると、一階微分可能かつ狭義単調な関数 $h(\cdot)$ を用いて $Y \sim h(X)$ という関係にある確率変数 Y の密度関数は、

$$f_y(y) \quad = \quad \frac{1}{\left|\frac{\partial h^{-1}(y)}{\partial x}\right|}f_x\left(h^{-1}(y)\right) \tag{11}$$

となる。

2　正規分布

正規分布は「誤差の分布」として知られている。ある量 X を計るとする。重量計に乗せてメモリを読む、ということを何回か繰り返して測定値を複数個、$X_1, X_2, \ldots, X_n$ と得て、それらの平均 $\overline{X}_n$ を X の測定結果、とする実験を考える。このとき $\overline{X}_n$ は、n が大きくなればなるほど、真値 X を中心とし、分散が σ^2/n と測定回数に反比例して小さくなる、正規分布に従うようになる。このことは中心極限定理によって正当化されるが、詳細は後に譲る。正規分布の密度関数は、次のように位置変換と尺度変換を用いて、得る。

平均が 0、分散が 1 の正規分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{12}$$

で与えられる。$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ は、全積分を 1 にするための乗数で、基準化定数と呼ばれることがある。

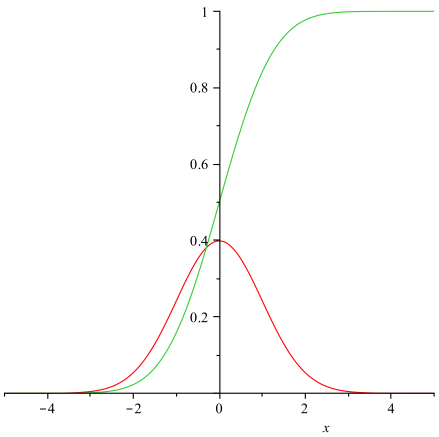

図 1: 標準正規分布の密度関数と累積分布関数

まず、平均が μ で分散が 1 の正規分布の密度関数は、位置変換を用いて、

$$f(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right) \tag{13}$$

で与えられることが分かる。

次に、分散を σ^2 倍するということが尺度は σ 倍することに他ならない

$$V[aX] = a^2 V[X] \tag{14}$$

ことを思い出せば、平均が μ で分散が σ^2 の正規分布の密度関数は、

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{15}$$

で与えられることが分かる。指数の肩に入った $1/\sigma^2$ は $x-\mu$ を $(x-\mu)/\sigma$ に置き換えることによって出現し、指数の外の $1/\sigma$ は尺度変換のヤコビヤンとして出現していることに注意する。これが、平均 μ、分散 σ^2 の正規分布の密度関数である。

2.1　e^{-x^2} の積分

e^{-x^2} の曲線は美しいベル型を描くが、その不定積分は誤差関数と呼ばれ、解析的に陽な表現を持たない。また $(-\infty,\infty)$ 上の定積分は計算でき、$\sqrt{\pi}$ となるが、計算には極座標に持ち込む意気込みが必要となる。

まず $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx$ と置く。指数の肩で円を描かせたいので、$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) dx$ との積を考える。これも I

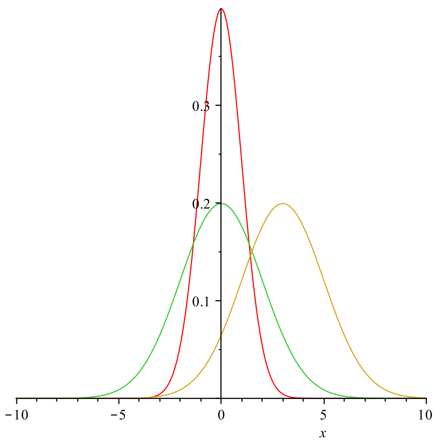

図 2: 標準正規分布の密度関数と累積分布関数

に等しいので、

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) dy\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right)\exp\left(-y^2\right) dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2-y^2\right) dxdy
\end{aligned} \tag{16}
$$

2 行目は積分順序を交換しただけ、3 行目は指数の肩をまとめただけ。これを極座標表現 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ に書き換えると、

$$
I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-r^2\right) rdrd\theta \tag{17}
$$

となる。ここで被積分関数に現れた r は、以下に示すように、 $dxdy$ から $drd\theta$ に変換するときの、ヤコビ行列の行列式である。

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial r\cos\theta}{\partial r} & \frac{\partial r\cos\theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial r\sin\theta}{\partial r} & \frac{\partial r\sin\theta}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r
\end{aligned} \tag{18}
$$

これより、

$$
dxdy = \left|\frac{\partial (x, y)^t}{\partial (r, \theta)}\right| drd\theta = rdrd\theta \tag{19}
$$

と分かる。

さて、積分を続ける。被積分関数に θ が含まれないので、

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{2pi} d\theta \int_0^{\infty} \exp\left(-r^2\right) rdr \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-r^2\right) rdr
\end{aligned} \tag{20}
$$

ここで $u = r^2$ (つまり $r = \sqrt{u}$) と置換すると、

$$
du = 2rdr \quad \Leftrightarrow \quad dr = \frac{1}{2r} du \tag{21}
$$

かつ

$$
u : 0 \to \infty \quad \text{when} \quad r : 0 \to \infty \tag{22}
$$

よって、I^2 は

$$
I^2 = 2\pi \int_0^{\infty} \exp(-u) \frac{1}{2} du = \pi \int_0^{\infty} \exp(-u) du \tag{23}
$$

となる。この積分は簡単で、

$$\int \exp(-u)\,du = -\exp(-u) + C \tag{24}$$

より、

$$I^2 = \pi\left[-\exp(-u)\right]_0^\infty = \pi\left[0-(-1)\right] = 2\pi \tag{25}$$

を得る。

以上より、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi} \tag{26}$$

となる。

2.2 誤差関数

誤差関数 $erf(x)$ は $[0, x]$ 上の e^{-t^2} の定積分の $2/\sqrt{\pi}$ 倍として定義される。

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{27}$$

数学では特殊関数の 1 つに数えられている。この関数は陽は表現を持たないが、被積分関数 e^{-t^2} を原点の回りでテイラー展開し、項別に定積分を求めれば、誤差関数自体のテイラー級数が得られる。

e^{-t^2} は偶関数であり、奇数次数の項はすべて消えることに注意しつつ、

$$\begin{aligned} \exp\left(-t^2\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^k t^{2k} \\ &= 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{24}t^8 + O\left(t^{10}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

となる。これを項別に積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^x \exp\left(-t^2\right) &= \sum_{k=0}^{x} \frac{1}{k!}(-1)^k \int_0^x t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{x} \frac{1}{k!}(-1)^k \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^x \\ &= \sum_{k=0}^{x} \frac{1}{k!}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \end{aligned} \tag{29}$$

となり、

$$\begin{aligned} erf(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{x} \frac{1}{k!}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + O\left(x^{11}\right)\right\} \end{aligned} \tag{30}$$

を得る。

2.3 期待値の計算

一番簡単なのは、関数

$$(x-\mu)\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{31}$$

が、点 $(\mu, 0)$ に対して奇関数となることを用いると、

$$\int_{-\infty}^{\mu} (x-\mu) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad = \quad -\int_{\mu}^{\infty} (x-\mu) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \tag{32}$$

が示せて、これより

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx &= \int_{-\infty}^{\mu} (x-\mu) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx + \int_{\mu}^{\infty} (x-\mu) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\mu} (x-\mu) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx - \int_{-\infty}^{\mu} (x-\mu) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= 0 \qquad (33)
\end{aligned}$$

となることから、

$$\int_{-\infty} \infty (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad = \quad E[x-\mu] = 0 \tag{34}$$

を得る。以上から

$$E[X] \quad = \quad \mu \tag{35}$$

を得る。

2.4　正規分布の分散

分散 σ^2 の計算は、部分積分を用いるものと、置換積分を用いるものと、あとモーメント母関数をテイラー展開するもの、があるらしい。以下は部分積分。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

と

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \mu
\end{aligned}$$

は所与とする。

$$\begin{aligned}
V[X] &= E\left[(X-\mu)^2\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \{-(x-\mu)\} \left[\{-(x-\mu)\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right] dx
\end{aligned}$$

ここで

$$\int \{-(x-\mu)\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad = \quad \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) + C$$

より、$\{-(x-\mu)\}$ と $\{-(x-\mu)\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ について部分積分を用いれば

$$\begin{aligned}
V[X] &= \left[\sigma^2 (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

を得る。

2.5 モーメント母関数

分散やそれ以上のモーメントの計算も可能である。しかし、正規分布のモーメント母関数は

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E[\exp(tX)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+tx\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2-2\mu x+\mu^2-2\sigma^2 xt}{2\sigma^2}\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2-2\left(\mu+\sigma^2 t\right)x+\mu^2}{2\sigma^2}\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu-\sigma^2\right)^2-2\mu\sigma^2 t-\sigma^4 t^2}{2\sigma^2}\right)dx \\
&= \exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu-\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}\right)dx \\
&= \exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2\right) \qquad (36)
\end{aligned}
$$

のように、積分を変形するだけで得られる。そのため実際には、モーメント母関数をテイラー展開する方が、速い。

2.6 正規分布の和の分布

モーメント母関数を用いて、次の関係が得られる。

$N\left(\mu_1,{\sigma_1}^2\right)+N\left(\mu_2,{\sigma_2}^2\right)\sim N\left(\mu_1+\mu_2,{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2\right)$

3 レポート課題

#12-1 参考書の p.196 にあるのは、平均が 0、分散が 1 の (標準) 正規分布の $Pr[X \geq x]=\alpha$ となる x の値の表である。これを利用して、次の確率を求めてみよ。表の読み方のメモを残すこと。

(1) $N\left(5,2^2\right)$ の上側 5% 点 ($Pr[X \geq a]=0.05$ となる a の値のこと)

(1) $N\left(4,3^2\right)$ の下側 5% 点 ($Pr[X \leq a]=0.05$ となる a の値のこと)

(1) $N\left(6,4^2\right)$ で $X \geq 8$ となる確率 ($Pr[X \geq 8]$ の値のこと)

#12-2 正規分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ の分散を求めよ。(答えは σ^2 なので、計算過程を示せ、という問題)

#12-3 任意の 2 つの正規分布 $N\left(\mu_1,{\sigma_1}^2\right), N\left(\mu_2,{\sigma_2}^2\right)$ の和の分布を求めよ。(これも答えは自明なので、計算過程を示せ、という問題)

#12-4 平均 0、分散 1 の正規分布に従う、互いに独立な確率変数 X_1, X_2 の同時分布を考える。

(1) (X_1,X_2) の同時分布の確率密度関数を導け。

(2) X_1 を σ_1 倍、X_2 を σ_2 倍したときの、$(\sigma_1 X_1,\sigma_2 X_2)$ の同時分布の確率密度関数を導け。

(3) さらに原点回りに θ だけ反時計回りに回転したときの、回転後の同時分布の確率密度関数を導け。(線形代数における 2 次元ベクトルの原点回りの回転を思い出して)

(4) さらに平均を (μ_1,μ_2) の移動させたときの、移動後の同時分布の確率密度関数を導け。

参考文献

[1] 微分積分学の教科書.

[2] 永田靖 (2005) 「統計学のための数学入門 30 講」朝倉書店.

[3] 宮川雅巳 (1988) 「統計技法」 共立出版.

[4] 稲垣宣生 (2003) 「数理統計学」改訂版, 裳華房.