確率論 (*Probability Theory*) 第 16 週

w.yamamoto

1 期末試験

問 1 以下は,

$$\Pr[X = k] = p(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

の確率関数を持つポアソン分布 (以下, $Po(\lambda)$ と記す) に纏わる問題である. この問いでは, $\mathrm{E}\left[X^k\right] = \mu_k$ という記法を用いる. 各問は答えのみ記すのでなく, 計算の過程が終えるように解答すること.

A 基本問題:ポアソン分布についての計算問題. $X \sim Po(\lambda)$ とする.

A-1 $Po(\lambda)$ の期待値 μ_1 を, $\sum_{k=0}^{\infty} k p(k; \lambda)$ を計算して求めよ.

A-2 $Po(\lambda)$ の分散を求めよ.

A-3 $Po(\lambda)$ のモーメント母関数を導け.

B 少し複雑な計算問題:歪度, 尖度の計算. ここでも $X \sim Po(\lambda)$ とする.

B-1 X の分散は

$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2 = \mu_2 - {\mu_1}^2 \tag{2}$$

のように表せる. 同様に, 3 次の中心モーメント $\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^3\right]$ を, μ_1, μ_2 および μ_3 を用いて表せ.

B-2 モーメント母関数から, X^3 の期待値 μ_3 を求めよ.

B-3 B-1 および B-2 の結果を用いて, ポアソン分布の歪度 (標準化された 3 次の中心モーメント)

$$\beta_1 = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^3\right] / (\mathrm{V}[X])^{3/2} \tag{3}$$

を λ の関数として導け.

B-4 B-3 で求めた歪度 β_1 の $\lambda \to \infty$ のときの極限を求めよ.

C 発展問題: n 個の互いに独立な確率変数 $X_i \sim Po(\lambda), i = 1, \ldots, n$ を考える.

C-1 A-3 で導いたモーメント母関数を用いて, $\sum_{i=1}^{n} X_i$ の従う確率分布を導け.

C-2 C-1 の結果を用いて, n が大きくなるにつれて平均 0, 分散 1 の正規分布 $N(0, 1)$ に従うようにするには, $\sum_{i=1}^{n} X_i$ をどのように変換すれば良いか, 変換の式を示せ.

問 2 以下は, 二次元の離散分布についての問題である. 2 つの確率変数 X, Y の同時確率が次のように与えられているとして, 各問いに答えよ. この問いの解答は, 結果のみでも構わない.

表 1 X と Y の同時確率

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$	X の周辺確率
$X = 1$	0.03	0.07	0.05	0.01	0.00	0.16
$X = 2$	0.07	0.11	0.12	0.02	0.01	0.33
$X = 3$	0.01	0.10	0.13	0.23	0.04	0.51
Y の周辺確率	0.11	0.28	0.30	0.26	0.05	

D 基本問題：確率の計算.

D-1 $|X - Y| \leq 1$ となる確率を求めよ.

D-2 $|X - Y| \leq 1$ を条件としたときの，X と Y の条件付き確率を次のような表にまとめよ.

表 2　条件付き確率表

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$
$X = 1$					
$X = 2$					
$X = 3$					

E 応用問題

E-1 $|X - Y| \leq 1$ の条件の下での，X と Y の共分散 (条件付き共分散ともいう) を求めよ.

E-2 $|X - Y| \leq 1$ の条件の下での，X と Y の相関係数 (条件付き相関係数ともいう) を求めよ.

問 3 二次元の確率変数 (X_1, X_2) が密度関数

$$f(x_1, x_2; \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right\}\right] \quad (4)$$

を持つ二変量正規分布に従うとする．ただし $\sigma_1 > 0$，$\sigma_2 > 0$，$1 > |\rho| > 0$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

F 復習問題

F-1 X_1 の周辺分布の密度関数を得よ.

F-1 X_2 の $X_1 = x_1$ を与えたときの条件付き分布の密度関数を得よ.

問 4 ギリシャ文字の大文字，小文字，読み (カタカナもしくは英語表記) を，下記のような 3×8 の表形式で答えよ.

表 3　ギリシャ文字一覧

A α アルファ	ベータ	ガンマ					
							オメガ

2　今年度は出題を見送った問題

- 他の離散分布：二項分布、負の二項分布
- 連続分布：指数分布、正規分布
- 大数の法則
- ベイズ型学習
- クイズ番組問題
- 条件付き期待値の分布
- 指数分布のサイズバイアス分布を用いた計算問題
- 具体的な問題
- 証明問題 (出すなら誘導付き)
- マルコフ連鎖
- 条件付き二項分布としての多項分布の導出 (出すなら誘導付き)
- 指数分布とポアソン分布の関係 (出すなら誘導付き)
- 非定常ポアソン過程の導出
- 誘導つきのポアソン性の証明 ($Pr[X > 1]$ が $o(t)$ であること)