

確率論 (Probability Theory) 第 16 週 期末試験

w.hamamoto

はじめに：試験問題は 2 ページ以降です。

1 諸注意とお願い

お願い：

- 解答用紙の使い方について、大問単位で、最初の 1, 2 は同じページ、3、4 はそれぞれ 1 ページずつ、5, 6 も同じページ、を使っての解答をお願いしたい。これは採点の際の都合なので、従わなくても減点はしないから、回答開始後に指示に従ってないことに気づいても、書き直さずにそのまま解答を続けて良い。

以下、どの科目でも言われる煩わしいことでしょうか、トラブル発生を避けたいので、再度、お願いしておきます。ご協力宜しくお願いします。

諸注意：

- 解答用紙は最初から 3 枚を受け取ったら、まずすべての解答用紙に名前と学籍番号を記せ。大問の解答順序は自由でよい。答案提出時には、使わなかった解答用紙も提出してよい。
- 筆記具、時計、関数電卓、衛生用品のみ、試験時間中に利用可。
- 電卓以外の機能を持つあらゆる機能、時計以外の機能を持つあらゆる機器は、持ち込みを許可しない。
- 通信手段になり得る機器、保存しておいた PDF ファイルや画像などの表示が可能な機器は、持ち込みを許可しない。(スマートフォン、タブレット、ノートパソコンなど)
- 音の出る物、振動する者は、音が出ないように、振動もしないよう、設定を確認すること。(腕時計の時報、携帯電話の着信音とバイブレーションなど)
- 試験時間中に使用しないあらゆる物は、鞆の中にしまい、足下に置くこと。(机の中や横の座席に置いておくと、心が揺れた時や弱くなった時に、つい見たくなるかもしれないので)
- 机の中および脇の席に、何か紙が入っているだけで、ルール違反とみなして減点することがある。更にそれらに、本科目に関する記載があった場合、カンニング行為とみなす。期末試験で見つけたら、証拠物品欧州の上、その場で署名押印の書類を作成し、教務課に引き渡すことになる。
- 学生証を机の上に提示しておくこと。試験時間中に出席調査を行う。学生証もしくは仮学生証を提示できない学生については、顔写真を撮影することがある。
- 3 年生は西 9 - 1 1 5、2 年生および 4 年生以上は西 9 - 1 3 5 で受験すること。席順は自由とする。
- 試験開始 30 分後 (03:10pm) まで遅刻者の受験を認める。退出は試験開始 30 分後 (03:10pm) から終了 5 分前 (04:05pm) まで認める。

2 期末試験問題

結果のみでなく、計算過程も読み取れるように解答すること。数値を答える問いには、有効桁数3桁で答えよ。また必要に応じて、別紙付録の正規分布表を参照せよ。

1. 基本事項の確認。次の各項目を説明する数式、定義、もしくは表現を書け。用いる記号や変数は各自、適切に定義せよ。(各2点, 合計20点)

1-1 独立な2確率変数の分散 (の加法性)

1-2 独立な2確率変数の積、の期待値

1-3 独立でない2確率変数の和、の分散

1-4 モーメント母関数

1-5 連続分布に従う確率変数、の期待値

1-6 離散分布に従う確率変数、の分散

1-7 確率変数の定数倍、の分散

1-8 2確率変数の共分散

1-9 独立とは限らない2確率変数の条件付き期待値と条件なし期待値(周辺期待値)の関係

1-10 独立とは限らない2確率変数の条件付き分散と条件なし分散(周辺分散とも)の関係

2. 不等式についての下記の問いに答えよ。ただし確率変数 X の期待値を $\mu_X = E[X]$ 、分散を $\sigma_X^2 = V[X]$ と記すものとする。(各5点、合計10点)

2-1 マルコフの不等式 $Pr[X \geq a] \leq \mu_X/a$ の証明の概略を述べよ。

2-2 チェビシエフの不等式 $Pr[|X - \mu_X| \geq a] \leq \sigma_X^2/a^2$ を用いて、 $n = 100, p = 0.01$ の二項分布 $Bin(100, 0.01)$ の上側5%点(累積確率95%点)を近似的に求めよ。

3. 大数の法則と中心極限定理について、下記の問題に答えよ。(各5点、合計20点)

3-1 大数の法則 $Pr[|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon] \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ の証明の概略を述べよ

3-2 大数の法則と中心極限定理の違いを述べよ。またその違いは何が主たる要因かを述べよ。

3-3 中心極限定理を用いて、二項分布 $Bin(n, p)$ の正規分布による近似を与えよ。(累積分布関数で書いても、確率分布どうしで書いても、それ以外でも構わない。)

3-4 中心極限定理を用いて、 $n = 100, p = 0.01$ の二項分布 $Bin(100, 0.01)$ の上側5%点(累積確率95%点)を近似的に求めよ。

4. 二変量正規分布についての下記の問いに答えよ。ただし $X = (X_1, X_2)$ を二変量正規分布に従う確率ベクトルとする。また二変量正規分布の確率密度関数は、 X_1 の周辺期待値と周辺分散を μ_1 および σ_1^2 、 X_2 の周辺期待値と周辺分散を μ_2 および σ_2^2 、 X_1 と X_2 の相関係数を ρ と記すとき、

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\} \quad (1)$$

で与えられるものとする。(各 5 点、合計 20 点)

4-1 X_1 の周辺分布の密度関数を記せ。

4-2 $X_1 = a$ を所与としたときの、 X_2 の条件付き分布の密度関数を記せ。

4-3 相関係数 $\rho = \text{Cov}[X_1, X_2] / \sqrt{V[X_1]V[X_2]}$ が満たすべき不等式を示せ。

4-4 4-3 で答えた不等式を証明せよ。

5. あるベルヌーイ試行 $B(p_1)$ を n 回独立に繰り返して成功回数 X_1 を観測した後で、その失敗回数分だけ別のベルヌーイ試行 $B(p_2)$ を独立に繰り返して成功回数 X_2 を観測することを考える。ここで二項分布 $\text{Bin}(n, p)$ の確率関数は

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (2)$$

である。(各 5 点、合計 20 点)

5-1 X_1 は試行回数 n で成功確率 p_1 の二項分布 $\text{Bin}(n, p_1)$ に従う確率変数だが、 X_2 は試行回数が $n - x_1$ との条件の下で成功確率 p_2 の(条件付き)二項分布 $\text{Bin}(n - x_1, p_2)$ に従う確率変数となる。 (X_1, X_2) の同時確率関数を導け。

5-2 X_1 の周辺期待値を求めよ。

5-3 X_2 の周辺期待値を求めよ。

5-4 X_1 と X_2 の共分散の符号を、理由とともに答えよ。

6. 前問にある二項分布以外で、ベルヌーイ試行から導かれる確率分布をできるだけ多く挙げ、確率分布の名前と、それぞれの確率分布とベルヌーイ試行との関係を確率分布間の関係を記せ。(最大 20 点)

7. ギリシャ文字(最大 20 点、別紙参照)

付録 正規分布表 (本紙は裏面が解答用紙になっており、試験後に回収する)

(参考書より)

学籍番号 : _____ . 氏名 : _____ .

7. 下の表を埋めなさい。(20 点、1 箇所誤るごとに 1 点減点)

7. ギリシャ文字回答欄

英語	ギリシャ大文字	ギリシャ小文字	読み(カタカナ)
a			
b			
g			
d			
e			
z			
ê			
th			
i			
k			
l			
m			
n			
x			
o			
p			
r			
s			
t			
u			
f			
ch			
ps			
ô			