Hand out

統計学 (*Statistics*) 第 8 週

due	7 decembre 2015
cur	7 decembre 2015
ver	0
rev	0

w.yamamoto

1 中間試験で尋ねたいこと

記述統計に関して。

- データが与えられたら、適切なグラフを選んで、データを表現できますか？
- データが与えられたら、幾つかの数値でおおよその姿を表現できますか？

推測統計に関して。

- 講義でよく例題として用いる 4 つの分布、それぞれの確率関数や確率密度関数を覚えていますか？
- それらの分布は、一つの分布族に属しています。何という名前のどんな分布族でしょう？
- 最尤推定量とは何ですか？
- 最小二乗推定量とは何ですか？
- モーメント推定量とは何ですか？
- 推定量の良さの基準にはどんなものがあるでしょうか？
- 確率変数が従う確率分布の確率関数や確率密度関数が与えられたら、互いに独立に観測された大きさ n のサンプルに基づく最尤推定量を導き出せますか？
- 確率分布と推定量を与えたら、その推定量の偏りの有無、推定量の標本分布の分散の大きさ、その推定量が十分統計量に基づいているか、を計算できますか？
- 確率分布の確率関数や確率密度関数を与えたら、互いに独立に観測された大きさ n のサンプルに基づいた未知母数の十分統計量を導き出せますか？
- クラメール=ラオの下界って何でしょう？
- ラオ=ブラックウェルの定理を使えますか？

2 二項分布

$$\begin{aligned} f(x; n, p) &= {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^x (1-p)^n {}_nC_x \end{aligned} \tag{1}$$

$$\log f(x; n, p) = \log {}_nC_x + x \log p + (n-x)\log(1-p) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \log f(x; n, p) = \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p} \tag{3}$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} \tag{4}$$

$$\mathrm{E}[X] = np \tag{5}$$

$$\mathrm{V}[X] = np(1-p) \tag{6}$$

$$\mathrm{E}\left[\hat{p}\right] = p \tag{7}$$

$$\mathrm{V}\left[\hat{p}\right] = \frac{p\left(1-p\right)}{n} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\frac{\partial}{\partial p}\log f\left(x;n,p\right)\right] &= \frac{\mathrm{E}\left[X\right]}{p} - \frac{n-\mathrm{E}\left[X\right]}{1-p}\\ &= 0\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial p}\log f\left(x;n,p\right)\right)^2\right] &= \frac{\mathrm{E}\left[X^2\right]}{p^2} + \frac{\mathrm{E}\left[(n-X)^2\right]}{(1-p)^2} - 2\frac{\mathrm{E}\left[X\left(n-X\right)\right]}{p\left(1-p\right)}\\ &= \cdots\end{aligned} \tag{10}$$

3　ポアソン分布

$$f\left(x;\lambda\right) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \tag{11}$$

$$\log f\left(x;\lambda\right) = x\log\lambda - \log x! - \lambda \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i;\lambda\right) &= \prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\\ &= \lambda^{\sum_i x_i}e^{-n\lambda}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i!}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f\left(x;\lambda\right) = \frac{x}{\lambda} - 1 \tag{13}$$

$$\mathrm{E}\left[X\right] = \frac{1}{\lambda} \tag{14}$$

$$\mathrm{V}\left[X\right] = \frac{1}{\lambda} \tag{15}$$

$$\mathrm{E}\left[\hat{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda} \tag{16}$$

$$\mathrm{V}\left[\hat{\lambda}\right] = \frac{1}{n\lambda} \tag{17}$$

4　指数分布

$$f\left(x;\lambda\right) = \lambda e^{-\lambda x} \tag{18}$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{19}$$

$$\mathrm{E}[X] = \lambda \tag{20}$$

$$\mathrm{V}[X] = \lambda^2 \tag{21}$$

$$\mathrm{E}\left[\overline{X}\right] = \lambda \tag{22}$$

$$\mathrm{V}\left[\overline{X}\right] = \frac{\lambda^2}{n} \tag{23}$$

5　正規分布

$$f\left(x; \mu, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i; \mu, \sigma^2\right) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2\right] && (25) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \frac{2\mu}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right] && (26)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}[X] = \mu \tag{27}$$

$$\mathrm{V}[X] = \sigma^2 \tag{28}$$

$$\mathrm{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \tag{29}$$

$$\mathrm{V}\left[\overline{X}\right] = \frac{\sigma^2}{n} \tag{30}$$